Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 8 класса

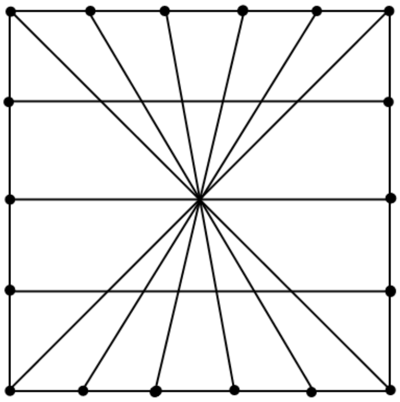
2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Аня нарисовала на плоскости квадрат и поделила верхнюю и нижнюю его стороны на 9 равных частей каждую. Затем она провела 10 прямых, соединяющих самую левую верхнюю точку с самой правой нижней, вторую слева верхнюю точку со второй справа нижней и так далее. После этого она поделила правую и левую стороны на 8 равных частей каждую и провела 7 горизонтальных прямых через точки деления. На сколько частей эти отрезки поделили квадрат? На рисунке показан пример, когда сначала она провела 6 отрезков сверху вниз, а затем 3 горизонтальных.



Ответ: 88

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

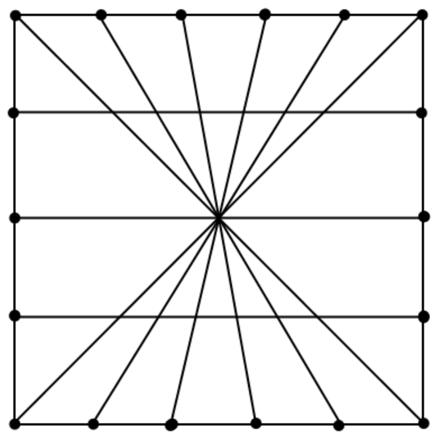
10 прямых сверху вниз поделили квадрат на $9 + 9 + 2$ частей. Затем каждая горизонтальная прямая, кроме той, что проведена посередине, делит на две 9 частей (либо сверху, либо снизу) и ещё две (одну справа и одну слева). Таких делений 6. Каждое из них прибавляет $9 + 2 = 11$ частей. Средняя горизонтальная прямая делит две части каждую на две (то есть, прибавляет две части). Итого: $20 + 11 \cdot 6 + 2 = 88$.

Задание № 1.2

Условие:

Таня нарисовала на плоскости квадрат и поделила верхнюю и нижнюю его стороны на 7 равных частей каждую. Затем она провела 8 прямых, соединяющих самую левую верхнюю точку с самой правой нижней, вторую слева верхнюю точку со второй справа нижней и так далее. После этого она поделила правую и левую стороны на 10 равных частей каждую и провела 9 горизонтальных прямых через точки деления. На сколько частей эти отрезки поделили квадрат?

На рисунке показан пример, когда сначала она провела 6 отрезков сверху вниз, а затем 3 горизонтальных.



Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

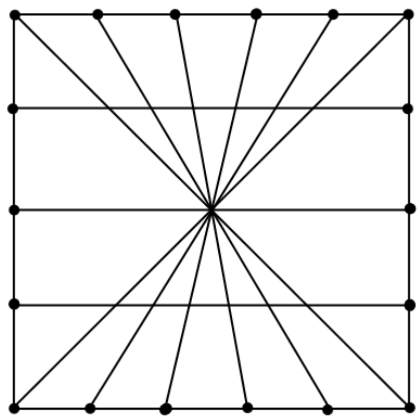
Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Лена нарисовала на плоскости квадрат и поделила верхнюю и нижнюю его стороны на 8 равных частей каждую. Затем она провела 9 прямых, соединяющих самую левую верхнюю точку с самой правой нижней, вторую слева верхнюю точку со второй справа нижней и так далее. После этого она поделила правую и левую стороны на 10 равных частей каждую и провела 9 горизонтальных прямых через точки деления. На сколько частей эти отрезки поделили квадрат?

На рисунке показан пример, когда сначала она провела 6 отрезков сверху вниз, а затем 3 горизонтальных.



Ответ: 100

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

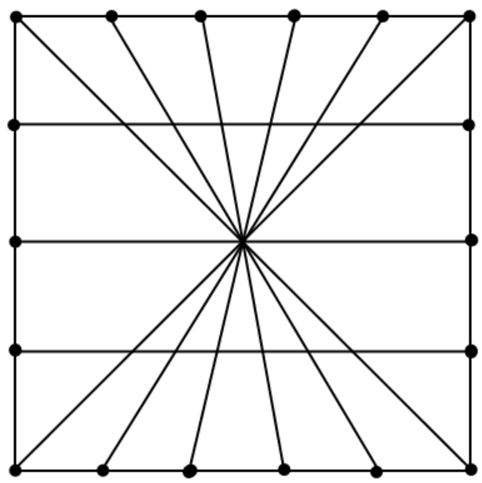
Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Аня нарисовала на плоскости квадрат и поделила верхнюю и нижнюю его стороны на 10 равных частей каждую. Затем она провела 11 прямых, соединяющих самую левую верхнюю точку с самой правой нижней, вторую слева верхнюю точку со второй справа нижней и так далее. После этого она поделила правую и левую стороны на 8 равных частей каждую и провела 7 горизонтальных прямых через точки деления. На сколько частей эти отрезки поделили квадрат?

На рисунке показан пример, когда сначала она провела 6 отрезков сверху вниз, а затем 3 горизонтальных.



Ответ: 96

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Однажды утром 10 января Кот в сапогах обнаружил, что его вес стал на 20 % больше, чем был до новогодних праздников. Чтобы восстановить форму, Кот в сапогах сел на диету и вскоре обнаружил, что его вес уменьшился на 20 % по сравнению с весом 10 января и на 224 грамма по сравнению с весом до новогодних праздников. Сколько весил Кот в сапогах до новогодних праздников? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 5.6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Обозначим вес Кота в сапогах до новогодних праздников за x. Тогда его вес 10 января составлял 1.2x, поскольку 120 % от числа — это $120 \div 100 = 1.2$ части от целого. Аналогично, после уменьшения веса на 20 %, он стал равняться $1.2x \cdot 0.8 = 0.96x$. Этот вес на 224 грамма меньше изначального, то есть x. Значит, $x - 0.96x = 224$ грамма, то есть $0.04x = 224$ грамма, откуда $x = 5600$ граммов, то есть 5.6 килограммов.

Задание № 2.2

Условие:

Однажды утром 10 января Кот в сапогах обнаружил, что его вес стал на 20 % больше, чем был до новогодних праздников. Чтобы восстановить форму, Кот в сапогах сел на диету и вскоре обнаружил, что его вес уменьшился на 20 % по сравнению с весом 10 января и на 216 граммов по сравнению с весом до новогодних праздников. Сколько весил Кот в сапогах до новогодних праздников? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 5.4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Однажды утром 10 января Кот в сапогах обнаружил, что его вес стал на 20 % больше, чем был до новогодних праздников. Чтобы восстановить форму, Кот в сапогах сел на диету и вскоре обнаружил, что его вес уменьшился на 20 % по сравнению с весом 10 января и на 236 граммов по сравнению с весом до новогодних праздников. Сколько весил Кот в сапогах до новогодних праздников? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 5.9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Однажды утром 10 января Кот в сапогах обнаружил, что его вес стал на 20 % больше, чем был до новогодних праздников. Чтобы восстановить форму, Кот в сапогах сел на диету и вскоре обнаружил, что его вес уменьшился на 20 % по сравнению с весом 10 января и на 232 грамма по сравнению с весом до новогодних праздников. Сколько весил Кот в сапогах до новогодних праздников? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 5.8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Из клетчатого квадрата 8 × 8 вырезали часть угловых клеток, а оставшуюся фигуру разбили на квадраты со сторонами 1 и 2 так, чтобы квадратов каждого типа получилось поровну. Сколько клеток могло быть вырезано?

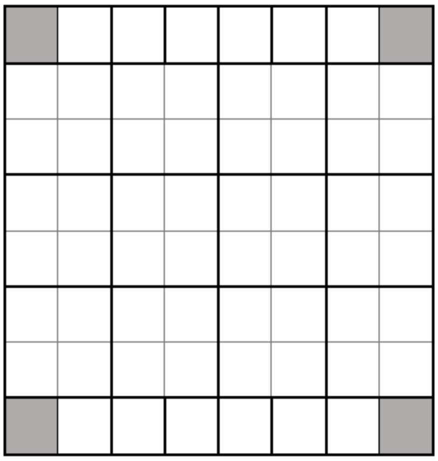
Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть имеется k квадратов со стороной 1, и k квадратов со стороной 2. Тогда общая площадь, которую занимают эти фигуры, составляет $k + 4 \cdot k = 5 \cdot k$. Значит, площадь должна делиться на 5. Поскольку площадь исходного квадрата равна 4, а вырезали не более 4 клеток, то разность будет делиться на 5 только если вырезали 4 клетки. Покажем, что фигура с удаленными угловыми клетками условию удовлетворяет.



Задание № 3.2

Условие:

Из клетчатого квадрата 9×9 вырезали часть угловых клеток, а оставшуюся фигуру разбили на квадраты со сторонами 1 и 3 так, чтобы квадратов каждого типа получилось поровну. Сколько клеток могло быть вырезано?

Ответ: 1

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Из клетчатого квадрата 11×11 вырезали часть угловых клеток, а оставшуюся фигуру разбили на квадраты со сторонами 1 и 3 так, чтобы квадратов каждого типа получилось поровну. Сколько клеток могло быть вырезано?

Ответ: 1

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Из клетчатого квадрата 7×7 вырезали часть угловых клеток, а оставшуюся фигуру разбили на квадраты со сторонами 1 и 2 так, чтобы квадратов каждого типа получилось поровну. Сколько клеток могло быть вырезано?

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

В кошельке лежит 1000 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет равно 300 и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

Ответ: 140

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть у нас x, y и z рублёвых, двухрублёвых и пятирублёвых монет соответственно. По условию $x + y + z = 300$, $x + 2y + 5z = 1000$. Допустим, $x = y$. Тогда $z = 300 - 2x$, откуда $x + 2x = 1000 - 5(300 - 2x)$, то есть $7x = 500$, что невозможно, так как 500 не делится на 7.

Допустим, $x = z$. Тогда $y = 300 - 2x$, откуда $x + 5x = 1000 - 2(300 - 2x)$, то есть $2x = 400$, $x = 200 = z$. Но тогда монет больше 300, что противоречит условию задачи.

Значит, $y = z$. Тогда $x = 300 - 2y$, откуда $300 - 2y = 1000 - 2y - 5y$, то есть $5y = 700$ и $y = z = 140$, $x = 20$.

Задание № 4.2

Условие:

В кошельке лежит 1010 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет равно 310 и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

Ответ: 140

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

В кошельке лежит 950 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет равно 300 и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

Ответ: 130

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

В кошельке лежит 925 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет равно 300 и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

Ответ: 125

Точное совпадение ответа — 1 балл

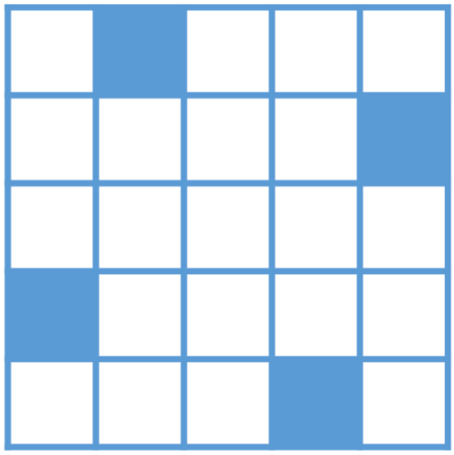
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Сколько клетчатых прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат 5×5) является прямоугольником.



Ответ: 127

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Способов выбрать горизонтальные линии (столько же, сколько и вертикальных) $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Таким образом, квадрат 5×5 содержит $15 \cdot 15 = 225$ прямоугольников.

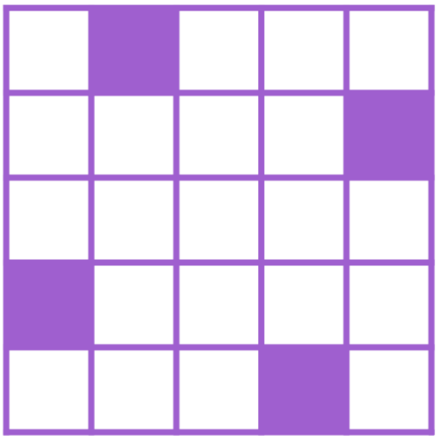
Из них не содержат закрашенные клетки 21 квадрат 1×1, 28 прямоугольников 1×2, 18 прямоугольников 1×3, 8 прямоугольников 1×4,
2 прямоугольника 1×5, 8 квадратов 2×2, 8 прямоугольников 2×3, 4 прямоугольника 2×4, 1 квадрат 3×3. Значит, число прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, равно

$$225 - 21 - 28 - 18 - 8 - 2 - 8 - 8 - 4 - 1 = 127 \text{ прямоугольников.}$$

Задание № 5.2

Условие:

Сколько клетчатых прямоугольников, содержащих ровно одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат 5×5) является прямоугольником.



Ответ: 100

Точное совпадение ответа — 1 балл

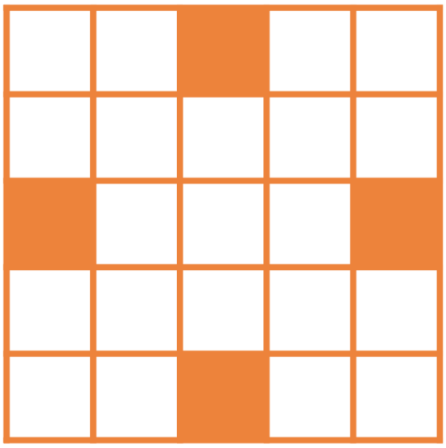
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Сколько клетчатых прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат 5×5) является прямоугольником.



Ответ: 139

Точное совпадение ответа — 1 балл

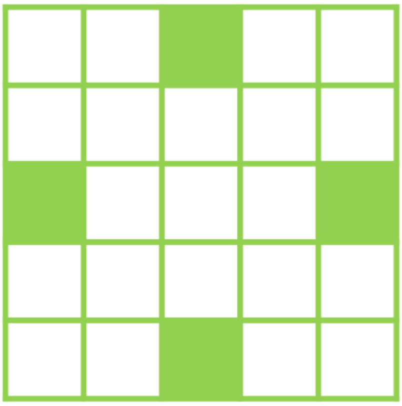
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Сколько клетчатых прямоугольников, содержащих ровно одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? Любой квадрат (в частности, сам квадрат 5×5) является прямоугольником.



Ответ: 104

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 4

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

В соревновании по настольному теннису участвовало ровно 50 ребят, среди которых половина — рыцари, всегда говорящие правду, и половина — лжецы, которые всегда лгут. По правилам турнира проигравший выбывал. В результате после нескольких игр ровно половина ребят выбыла. После этих событий каждый из оставшихся участников заявил, что выиграл ровно у одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться среди участников турнира?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Каждый из оставшихся рыцарей выиграл ровно у одного рыцаря. Поэтому оставшихся рыцарей не больше, чем выбывших, то есть удвоенное количество оставшихся рыцарей не больше 25, следовательно, их не больше 12. Пример: один из рыцарей выигрывает у другого, затем половина оставшихся рыцарей выигрывает у одного из оставшихся, включая того, который выиграл у первого рыцаря (сначала 2-й рыцарь выиграет у 1-го, потом 3-й у 2-го, 5-й у 4-го и т. д. 25-й у 24-го), а среди 25 лжецов, например, один выиграет по очереди у 12 других лжецов.

Задание № 6.2

Условие:

В соревновании по настольному теннису участвовало ровно 46 ребят, среди которых половина — рыцари, всегда говорящие правду, и половина — лжецы, которые всегда лгут. По правилам турнира проигравший выбывал. В результате после нескольких игр ровно половина ребят выбыла. После этих событий каждый из оставшихся участников заявил, что выиграл ровно у одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться среди участников турнира?

Ответ: 11

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

В соревновании по настольному теннису участвовало ровно 70 ребят, среди которых половина — рыцари, всегда говорящие правду, и половина — лжецы, которые всегда лгут. По правилам турнира проигравший выбывал. В результате после нескольких игр ровно половина ребят выбыла. После этих событий каждый из оставшихся участников заявил, что выиграл ровно у одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться среди участников турнира?

Ответ: 17

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

В соревновании по настольному теннису участвовало ровно 58 школьников, среди которых половина — рыцари, всегда говорящие правду, и половина — лжецы, которые всегда лгут. По правилам турнира проигравший выбывал. В результате после нескольких игр ровно половина ребят выбыла. После этих событий каждый из оставшихся участников заявил, что выиграл ровно у одного рыцаря. Какое наибольшее количество рыцарей могло остаться среди участников турнира?

Ответ: 14

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Даша нарисовала прямоугольник с целыми сторонами. Катя нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 2 и увеличив ширину на 3. Таня тоже нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 3 и увеличив ширину на 5. Оказалось, что площади прямоугольников Кати и Тани равны. Выберите все возможные значения периметра прямоугольника Даши:

Ответ:

- o 50
- o 52
- ✓ 54
- o 100
- o 206

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть Дашин прямоугольник имел длину x и ширину y. Тогда площади Катиного и Таниного прямоугольников равны, соответственно, $(x - 2)(y + 3)$ и $(x - 3)(y + 5)$.

Приравняв эти два выражения, получим $xy - 2y + 3x - 6 = xy - 3y + 5x - 15$, откуда $y = 2x - 9$. Тогда периметр Дашиного прямоугольника равен $2x + 2y = 6x - 18 = 6(x - 3)$. Это число кратно 6. Из приведённых чисел подходит только 54. Если $6x - 18 = 54$, то $x = 12$. Тогда $y = 2x - 9 = 15$.

Задание № 7.2

Условие:

Даша нарисовала прямоугольник с целыми сторонами. Катя нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 3 и увеличив ширину на 1. Таня тоже нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 4 и увеличив ширину на 3. Оказалось, что площади прямоугольников Кати и Тани равны. Выберите все возможные значения периметра прямоугольника Даши:

Ответ:

○ 44 ○ 46 ✓ 48 ○ 92 ○ 192	○ 44 ○ 46 ○ 48 ○ 92 ✓ 192	○ 44 ○ 46 ✓ 48 ○ 92 ✓ 192

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Даша нарисовала прямоугольник с целыми сторонами. Катя нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 2 и увеличив ширину на 4. Таня тоже нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 4 и увеличив ширину на 7. Оказалось, что площади прямоугольников Кати и Тани равны. Выберите все возможные значения периметра прямоугольника Даши:

Ответ:

- o 56
- ✓ 60
- o 66
- o 92
- o 192

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Даша нарисовала прямоугольник с целыми сторонами. Катя нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 1 и увеличив ширину на 3. Таня тоже нарисовала свой прямоугольник, уменьшив длину Дашиного на 3 и увеличив ширину на 6. Оказалось, что площади прямоугольников Кати и Тани равны. Выберите все возможные значения периметра прямоугольника Даши:

Ответ:

- o 56
- o 72
- o 76
- ✓ 90
- o 292

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Угол C треугольника ABC равен 60°. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что DC + CA = BC. Известно, что AB = 8. Найдите длину AD.

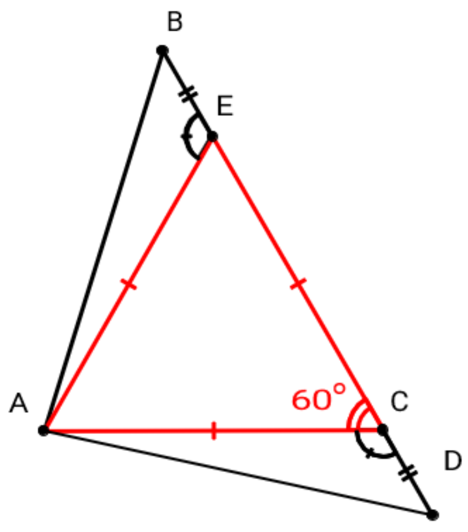
Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

На стороне CB отметим точку E так, что CE = CA. Тогда треугольник ACE равносторонний, а EB = DC. Тогда заметим, что треугольник AEB равен треугольнику ADC (поскольку ∠AEB = ∠ACD = 120°, BE = CD, AE = AC). Тогда AD = 8.



Задание № 8.2

Условие:

Угол C треугольника ABC равен 60°. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что DC + CA = BC. Оказалось, что ∠CAD = 20°. Найдите угол CAB. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 80

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Угол C треугольника ABC равен 60°. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что DC + CA = BC. Оказалось, что ∠ABC = 40°. Найдите угол ADC. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Угол C треугольника ABC равен 60°. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что DC + CA = BC. Оказалось, что ∠ADB = 40°. Найдите угол BAD. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 100

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1