Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2024–2025 учебный год

1-1. В актовом зале расставили 25 рядов по 10 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 10 в первом ряду, потом от 11 до 20 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 25 рядов по 13 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 13 в первом ряду, потом от 14 до 26 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?

Ответ. 22.

Решение. Количество мест в ряду увеличилось на 3, поэтому в первом ряду останутся все 10 зрителей, которые там сидели.

Во втором ряду останутся все, кроме трёх пересевших в первый ряд, — то есть 7 зрителей.

Из третьего ряда вперёд пересядут 6 зрителей: во втором ряду, как мы уже знаем, остались 7 зрителей, поэтому для зрителей из следующих рядов осталось $13-7=6$ мест, то есть останутся $10-6=4$ зрителя.

Из четвёртого ряда вперёд пересядет 9 зрителей (так как в третьем ряду остались 4 зрителя, остались $13-4=9$ мест для зрителей из следующих рядов), останется $10-9=1$ зритель. Заметим, что теперь в четвёртом ряду осталось $13-1=12>10$ мест для зрителей из следующих рядов, поэтому в пятом и последующих рядах все зрители будут перемещаться хотя бы на один ряд вперёд.

Значит, общее число зрителей, оставшихся в своём ряду, равно $10+7+4+1=22$.

2-1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка E. Известно, что $\angle EBC=25^\circ$, $\angle BCA=32^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$. Точка D на плоскости такова, что $AD \parallel BE$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle DAB$? Ответ выразите в градусах.

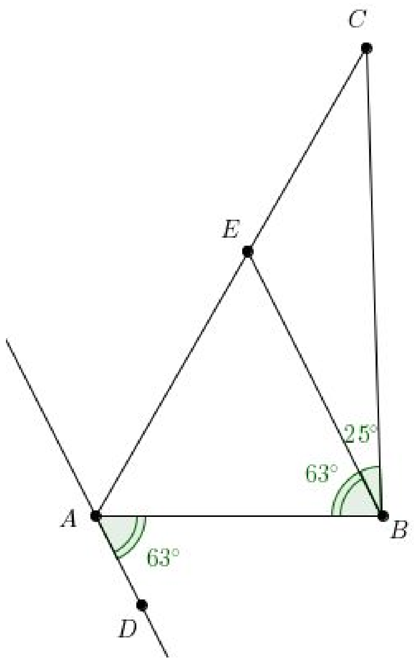
Ответ. 63.

Решение. Так как

$$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - (60^\circ + 32^\circ) = 88^\circ,$$

то

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 88^\circ - 25^\circ = 63^\circ.$$



Проведём прямую $\ell \parallel BE$ — на ней лежит точка D из условия.

Если точка D в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка B, то $\angle DAB = \angle ABE = 63^\circ$ (накрест лежащие при параллельных прямых AD и BE и секущей AB).

Если точка D в другой полуплоскости относительно прямой AC, нежели точка B, то $\angle DAB = 180^\circ - \angle ABE = 117^\circ$ (внутренние односторонние углы при прямых AD и BE и секущей AB). Из найденных двух значений (63° и 117°) наименьшее значение равно 63°.

3-1. Жора задумал три натуральных числа a, b, c. Чему могут равняться $a+b$, $b+c$ и $c+a$?
a) 102, 201, 300
b) 201, 302, 403,
c) 201, 303, 606,
d) 302, 305, 507,
e) 301, 403, 505.

Ответ. b) и d)

Решение. Пусть $a+b=x$, $b+c=y$ и $c+a=z$ (для определённости $x \leqslant y \leqslant z$). Сложим эти равенства: $(a+b)+(b+c)+(c+a)=x+y+z$, откуда $x+y+z=2(a+b+c)$ — чётное число (условие 1).

Далее заметим, что $a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)$. Отсюда

$$a=a+b+c-(b+c)=\frac{1}{2}(x+y+z)-y=\frac{1}{2}(x-y+z).$$

Аналогично

$$b=\frac{1}{2}(x+y-z) \quad \text{и} \quad c=\frac{1}{2}(y+z-x).$$

Так как a натуральное, то $\frac{1}{2}(x-y+z)>0$, откуда $x+z>y$. Аналогично $x+y>z$ и $y+z>x$: т.е. заданные в условии задачи суммы должны соответствовать и такому условию — сумма любых двух из них больше третьей (условие 2).

Теперь можем найти ответ:
a) Не выполняется условие 1.
b) Подходит тройка $(151, 50, 252)$.
c) Не выполняется условие 2: $201+303<606$.
d) Подходит тройка $(252, 50, 255)$.
e) Не выполняется условие 1.

4-1. В турнире по боксу принимают участие 27 человек. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что N участников провели на ринге не менее 4 матчей. При каком наибольшем N такое возможно?

Ответ. 8.

Решение. Для начала докажем, что больше 8 таких участников быть не могло. Для начала вспомним, что если участников 27, то в турнире на вылет будет ровно 26 матчей: каждый матч выбывает ровно один участник, в начале их 27, а остаться должен ровно 1. Это значит, что побед у различных участников также было 26.

Если участник проводит на ринге не менее 4 матчей, то по крайней мере 3 из них он должен выиграть. Если бы таких участников было хотя бы 9, то всего побед было бы хотя бы 27, что неправда. Значит, участников, которые провели на ринге не менее 4 матчей, не более 8.

Теперь докажем, что 8 таких участников в турнире быть могло. Для этого достаточно привести один пример такого турнира. Пронумеруем всех участников от 1 до 27 и

- участник 1 обыгрывает участников 27, 26, 25 и проигрывает участнику 2;
- участник 2 обыгрывает участников 24, 23 (и 1) и проигрывает участнику 3;
- участник 3 обыгрывает участников 22, 21 (и 2) и проигрывает участнику 4;
- ...
- участник 7 обыгрывает участников 14, 13 (и 6) и проигрывает участнику 8;
- участник 8 обыгрывает участников 12, 11, 10, 9 (и 7).

5-1. Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 6», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел равна 14». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?

Ответ. 9.

Решение. Докажем, что Саша задумал 5. Это число подходит, так как при умножении числа 5 на любое число от 1 до 10 результат не содержит цифры 6. Осталось для каждого остального числа показать, какое число мог задумать Юра, чтобы в произведении чисел Саши и Юры была цифра 6.

Если Саша задумал,	1	2	3	4	6	7	8	9	10
то Юра мог задумать	6	3	2	4	1	9	2	4	6
Тогда произведение	6	6	6	16	6	63	16	36	60

Таким образом, Саша задумал 5. Тогда Юра задумал $14 - 5 = 9$.

6-1. Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 5 лягушек (возможно, 0);
- чётное число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное шести число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2025 ингредиентов.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.

Ответ. 1013.

Решение. Заметим, что всего ингредиентов — нечётное количество, а волчьих зубов и драконьих чешуек должно быть чётное количество. Значит, лягушек должно быть нечётное количество.

1 Если лягушка одна, то на волчьи зубы и драконьи чешуйки приходится 2024 слота. Заметим, что выбрав количество драконьих чешуек (их может быть от $0 \cdot 6$ до $337 \cdot 6 = 2022$ — 338 вариантов), остаток точно удастся заполнить волчьими зубами. Значит, в этом случае всего 338 вариантов.

3 Если лягушек три, то аналогично предыдущему, здесь всего 338 вариантов.

5 Если лягушек пять, то аналогично предыдущему, здесь всего 337 вариантов.

Итак, всего вариантов $338 + 338 + 337 = 1013$.

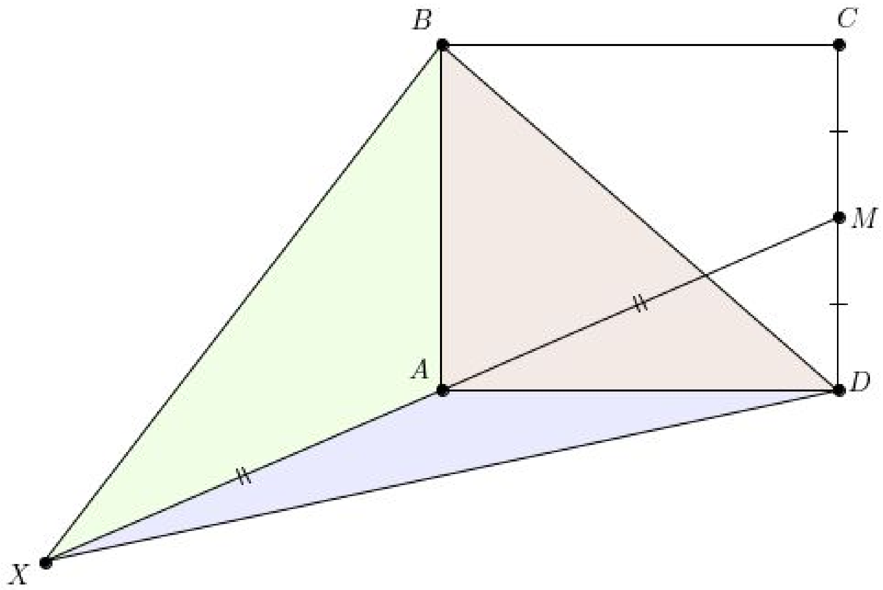
7-1. Длины сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны 20 и 23 соответственно. Пусть M — середина стороны CD и пусть X — такая точка на плоскости, что A — середина отрезка XM. Найдите площадь треугольника XBD.

Ответ. 575.

Решение. Будем пользоваться такими фактами.

1. Площадь треугольника, одна сторона которого совпадает со стороной прямоугольника, а ещё одна вершина лежит на противоположной стороне, равна половине площади прямоугольника. Если прямоугольник со сторонами a и b, то его площадь равна ab, а площадь «вписанного» треугольника равна $\frac{1}{2}ab$.

2. Медиана делит треугольник на два треугольника равной площади. Действительно, середина стороны разбивает отрезок на две равные стороны в этих треугольниках, а опущенная на эти стороны высота одна и та же.



Пусть площадь $ABCD$ равна S. Тогда

$$S_{XAB} = S_{ABM} = \frac{1}{2}S,$$
$$S_{XAD} = S_{ADM} = \frac{1}{2}AD \cdot DM = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}CD = \frac{1}{4}AD \cdot CD = \frac{1}{4}S,$$
$$S_{BAD} = \frac{1}{2}S.$$

Отсюда

$$S_{XBD} = S_{XAB} + S_{XAD} + S_{BAD} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{2}S = \frac{5}{4}S.$$

Так как $S = 20 \cdot 23 = 460$, то $S_{XBD} = \frac{5}{4} \cdot 460 = 575$.

8-1. Простое число p таково, что для любых целых чисел a и b числа $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на p, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно p.

Ответ. 7 или 11.

Решение. Решение будет опираться на такое наблюдение:

$$10 \cdot (a + 8b) - (10a + 3b) = 77b. \tag{$*$}$$

Для начала докажем, что 7 и 11 подходят. Так как разность $10 \cdot (a + 8b)$ и $10a + 3b$ делится на 7 (см. $(*)$), то или эти оба числа делятся на 7, или оба не делятся. Так как 10 и 7 взаимно просты, то числа $10 \cdot (a + 8b)$ и $a + 8b$ или оба делятся на 7, или оба не делятся. Итак, $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на 7, или оба не делятся.

Теперь докажем, что ни одно другое p не подходит. Для этого надо предъявить какие-то числа a и b, что из чисел $10a + 3b$ и $a + 8b$ одно делится на p, а другое — нет. Равенство $(*)$ показывает, что лучше взять $b = 1$. Тогда в качестве a подойдёт $p - 8$. Тогда $10a + 3b = 10p - 77$ — не делится на p (т.к. p это не 7 и не 11), $a + 8b = p$ — делится на p.

Информация о вариантах

1-1. В актовом зале расставили 25 рядов по 10 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 10 в первом ряду, потом от 11 до 20 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 25 рядов по 13 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 13 в первом ряду, потом от 14 до 26 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?
Ответ. 22

1-2. В актовом зале расставили 20 рядов по 11 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 11 в первом ряду, потом от 12 до 22 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 20 рядов по 14 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 14 в первом ряду, потом от 15 до 28 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?
Ответ. 26

1-3. В актовом зале расставили 27 рядов по 10 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 10 в первом ряду, потом от 11 до 20 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 27 рядов по 14 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 14 в первом ряду, потом от 15 до 28 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?
Ответ. 18

1-4. В актовом зале расставили 26 рядов по 11 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 11 в первом ряду, потом от 12 до 22 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 26 рядов по 15 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 15 в первом ряду, потом от 16 до 30 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?
Ответ. 21

2-1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка E. Известно, что $\angle EBC = 25°$, $\angle BCA = 32°$, $\angle BAC = 60°$. Точка D на плоскости такова, что $AD \parallel BE$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle DAB$? Ответ выразите в градусах.
Ответ. 63

2-2. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle KBC = 27°$, $\angle BCA = 31°$, $\angle BAC = 64°$. Точка M на плоскости такова, что $AM \parallel BK$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle MAB$? Ответ выразите в градусах.
Ответ. 58

2-3. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка E. Известно, что $\angle EBC = 28°$, $\angle BCA = 30°$, $\angle BAC = 65°$. Точка D на плоскости такова, что $AD \parallel BE$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle DAB$? Ответ выразите в градусах.
Ответ. 57

2-4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle KBC = 30°$, $\angle BCA = 33°$, $\angle BAC = 55°$. Точка M на плоскости такова, что $AM \parallel BK$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle MAB$? Ответ выразите в градусах.
Ответ. 62

3-1. Жора задумал три натуральных числа a, b, c. Чему могут равняться $a + b$, $b + c$ и $c + a$?
a) 102, 201, 300
b) 201, 302, 403,
c) 201, 303, 606,
d) 302, 305, 507,
e) 301, 403, 505.
Ответ. b), d)

3-2. Жора задумал три натуральных числа a, b, c. Чему могут равняться $a+b$, $b+c$ и $c+a$?
a) 103, 204, 305
b) 101, 206, 407,
c) 207, 305, 603,
d) 205, 308, 501,
e) 302, 404, 708.
Ответ. a), d)

3-3. Жора задумал три натуральных числа a, b, c. Чему могут равняться $a+b$, $b+c$ и $c+a$?
a) 105, 203, 301
b) 101, 206, 407,
c) 209, 308, 407,
d) 209, 306, 601,
e) 303, 404, 505.
Ответ. c), e)

3-4. Жора задумал три натуральных числа a, b, c. Чему могут равняться $a+b$, $b+c$ и $c+a$?
a) 101, 209, 306
b) 101, 202, 505,
c) 206, 305, 404,
d) 301, 302, 607,
e) 404, 504, 704.
Ответ. a), e)

4-1. В турнире по боксу принимают участие 27 человек. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что N участников провели на ринге не менее 4 матчей. При каком наибольшем N такое возможно?
Ответ. 8

4-2. В турнире по боксу принимают участие 38 человек. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что N участников провели на ринге не менее 5 матчей. При каком наибольшем N такое возможно?
Ответ. 9

4-3. В турнире по боксу принимают участие 32 человека. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что N участников провели на ринге не менее 7 матчей. При каком наибольшем N такое возможно?
Ответ. 5

4-4. В турнире по боксу принимают участие 72 человек. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что N участников провели на ринге не менее 8 матчей. При каком наибольшем N такое возможно?
Ответ. 10

5-1. Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 6», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел равна 14». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?
Ответ. 9

5-2. Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 8», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел

равна 13». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?
Ответ. 8

5-3. Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 6», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел равна 12». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?
Ответ. 7

5-4. Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 8», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел равна 11». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?
Ответ. 6

6-1. Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 5 лягушек (возможно, 0);
- чётное число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное шести число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2025 ингредиентов.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.
Ответ. 1013

6-2. Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 5 лягушек (возможно, 0);
- чётное число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное восьми число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2025 ингредиентов.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.
Ответ. 760

6-3. Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 8 лягушек (возможно, 0);
- кратное трём число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное шести число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2024 ингредиента.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.
Ответ. 1012

6-4. Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 11 лягушек (возможно, 0);
- кратное четырём число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное восьми число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2023 ингредиента.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.

Ответ. 758

7-1. Длины сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны 20 и 23 соответственно. Пусть M — середина стороны CD и пусть X — такая точка на плоскости, что A — середина отрезка XM. Найдите площадь треугольника XBD.

Ответ. 575

7-2. Длины сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны 16 и 27 соответственно. Пусть M — середина стороны CD и пусть K — такая точка на плоскости, что A — середина отрезка KM. Найдите площадь треугольника KBD.

Ответ. 540

7-3. Длины сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны 21 и 24 соответственно. Пусть M — середина стороны CD и пусть X — такая точка на плоскости, что A — середина отрезка XM. Найдите площадь треугольника XBD.

Ответ. 630

7-4. Длины сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ равны 17 и 28 соответственно. Пусть M — середина стороны CD и пусть K — такая точка на плоскости, что A — середина отрезка KM. Найдите площадь треугольника KBD.

Ответ. 595

8-1. Простое число p таково, что для любых целых чисел a и b числа $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на p, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно p.

Ответ. 7 или 11

8-2. Простое число p таково, что для любых целых чисел a и b числа $9a + 8b$ и $a + 7b$ или оба делятся на p, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно p.

Ответ. 5 или 11

8-3. Простое число p таково, что для любых целых чисел a и b числа $13a + 4b$ и $a + 3b$ или оба делятся на p, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно p.

Ответ. 5 или 7

8-4. Простое число p таково, что для любых целых чисел a и b числа $11a + 5b$ и $a + 4b$ или оба делятся на p, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно p.

Ответ. 3 или 13