Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 9 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 4 таймов по 12 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер в финальном матче делал замены так, что всего на площадке побывало 9 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке игрок, не являющийся капитаном? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что игра идёт 48 минут. Так как на поле всегда 5 игроков, то за игру пройдёт $48 \cdot 5 = 240$ человеко-минут. Пусть обычный игрок провёл на площадке x минут, тогда капитан был на поле $2x$ минут, а все игроки вместе — $10x$ минут. Тогда $10x = 240$, $x = 24$.

Задание № 1.2

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 4 таймов по 18 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер в финальном матче делал замены так, что всего на площадке побывало 14 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке капитан? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 48

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 3 таймов по 16 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер в финальном матче делал замены так, что всего на площадке побывало 11 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — вдвое больше. Сколько времени провёл на площадке капитан? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

В школьном чемпионате по баскетболу каждая игра состоит из 3 таймов по 18 минут, при этом в каждый момент на площадке должно быть ровно 5 игроков. Тренер в финальном матче делал замены так, что всего на площадке побывало 7 игроков и все, кроме капитана, находились на площадке равное время, а капитан — втрое больше. Сколько времени провёл на площадке игрок, не являющийся капитаном? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 30

Точное совпадение ответа — 1 балл

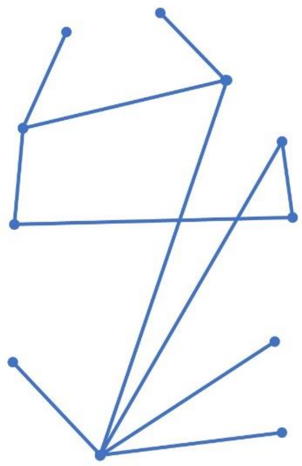
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Дана схема государства, на которой точками обозначены города (их всего 11), а линиями — дороги.



Президент хочет достроить несколько дорог так, чтобы из каждого города выходило одинаковое количество дорог. Какое наименьшее количество дорог ему надо будет достроить?

Ответ: 22

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

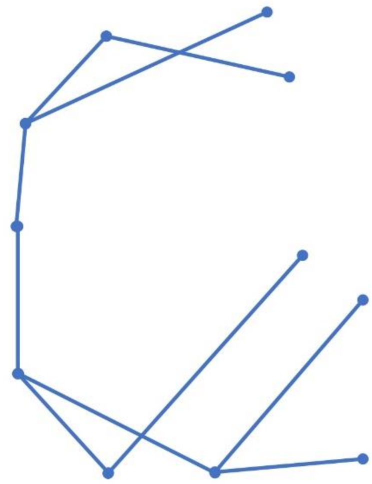
Решение.

Заметим, что есть вершина степени 5, а значит, все степени минимум 5. Если все вершины степени 5, то сумма степеней будет нечётная, а это невозможно, так как каждая дорога считается в двух городах. Значит, надо делать так, чтобы из каждого города выходило по 6 дорог. Всего будет $6 \cdot \frac{11}{2} = 33$ дороги, а 11 дорог уже есть — итого надо достроить 22 дороги. Пример легко строится.

Задание № 2.2

Условие:

Дана схема государства, на которой точками обозначены города (их всего 11), а линиями — дороги.



Президент хочет достроить несколько дорог так, чтобы из каждого города выходило одинаковое количество дорог. Какое наименьшее количество дорог ему надо будет достроить?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

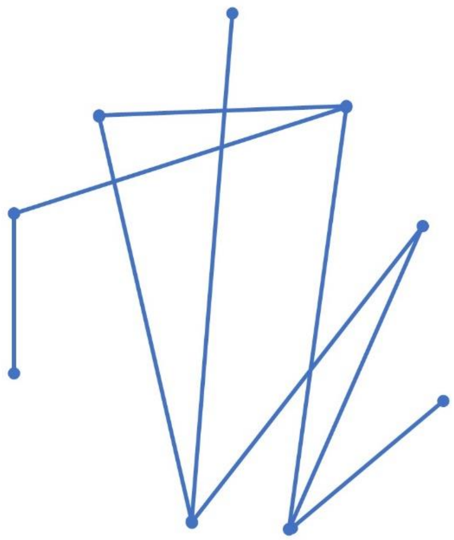
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Дана схема государства, на которой точками обозначены города (их всего 9), а линиями — дороги.



Президент хочет достроить несколько дорог так, чтобы из каждого города выходило одинаковое количество дорог. Какое наименьшее количество дорог ему надо будет достроить?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

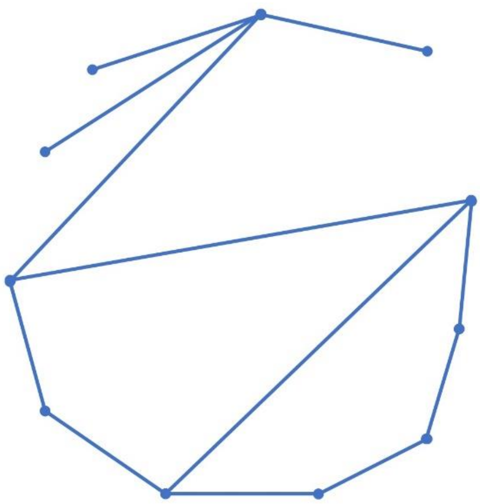
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Дана схема государства, на которой точками обозначены города (их всего 11), а линиями — дороги.



Президент хочет достроить несколько дорог так, чтобы из каждого города выходило одинаковое количество дорог. Какое наименьшее количество дорог ему надо будет достроить?

Ответ: 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

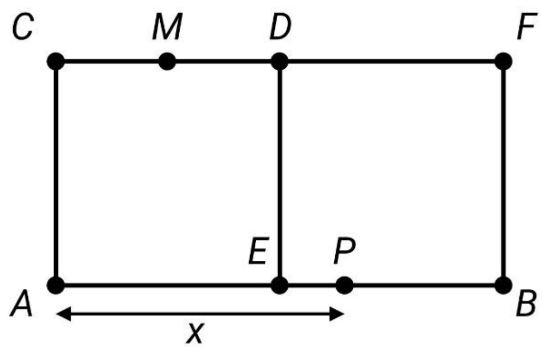
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

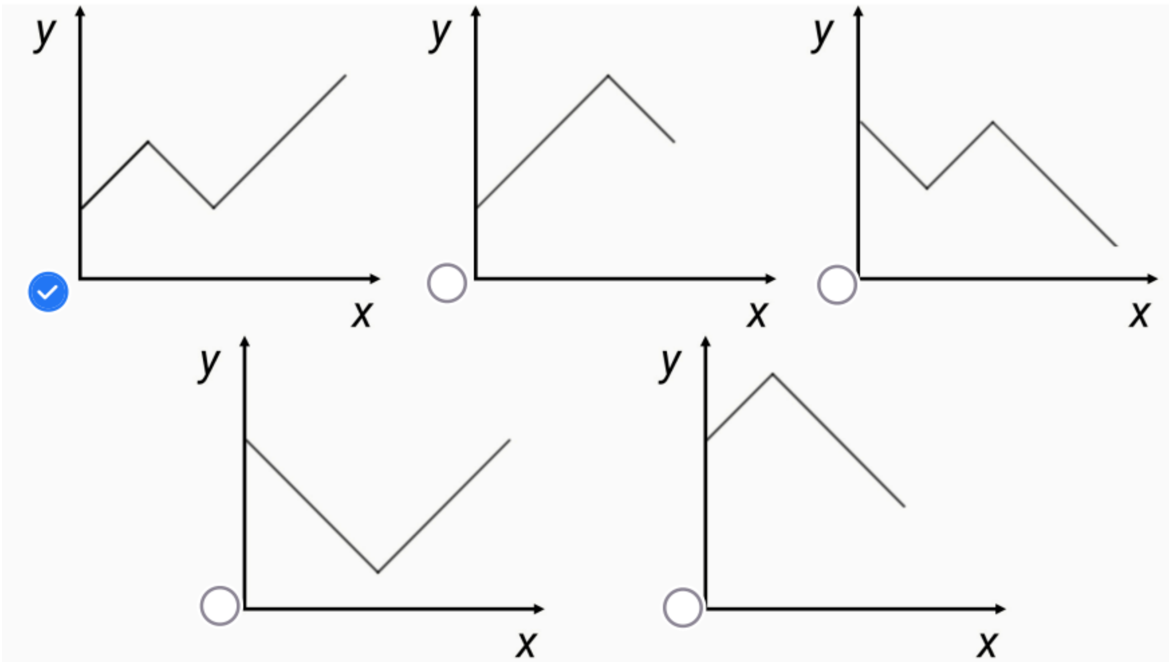
Условие:

Из проволоки сделаны два квадрата ACDE и EDFB. Точка M — середина отрезка CD, а точка P находится на отрезке AB.



Муравей хочет дойти от точки P до точки M кратчайшим путём по проволоке. Возьмём за x расстояние AP. Выберите график зависимости расстояния, которое проползёт муравей, от x:

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

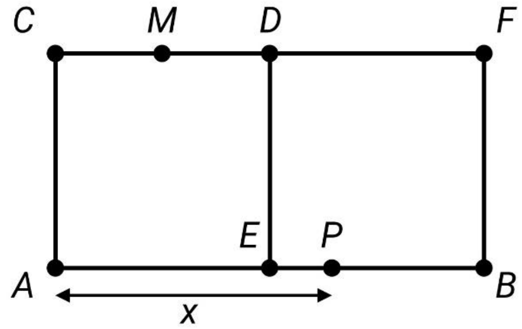
Решение.

Пусть сторона квадрата равна 1. Заметим, что когда точка P находится на небольшом расстоянии от A (менее половины стороны квадрата), $0 \leq x \leq 0.5$, выгоднее идти по пути A-C-M, поэтому при увеличении x расстояние увеличивается. Когда P от A дальше, чем середина стороны квадрата ($0.5 \leq x \leq 1$), становится выгоднее идти путем E-D-M, и общее расстояние уменьшается. Далее, когда P переходит на отрезок EB, то нам по-прежнему надо идти P-E-D-M, но расстояние увеличивается. Этому условию удовлетворяет только первый слева график в верхнем ряду.

Задание № 3.2

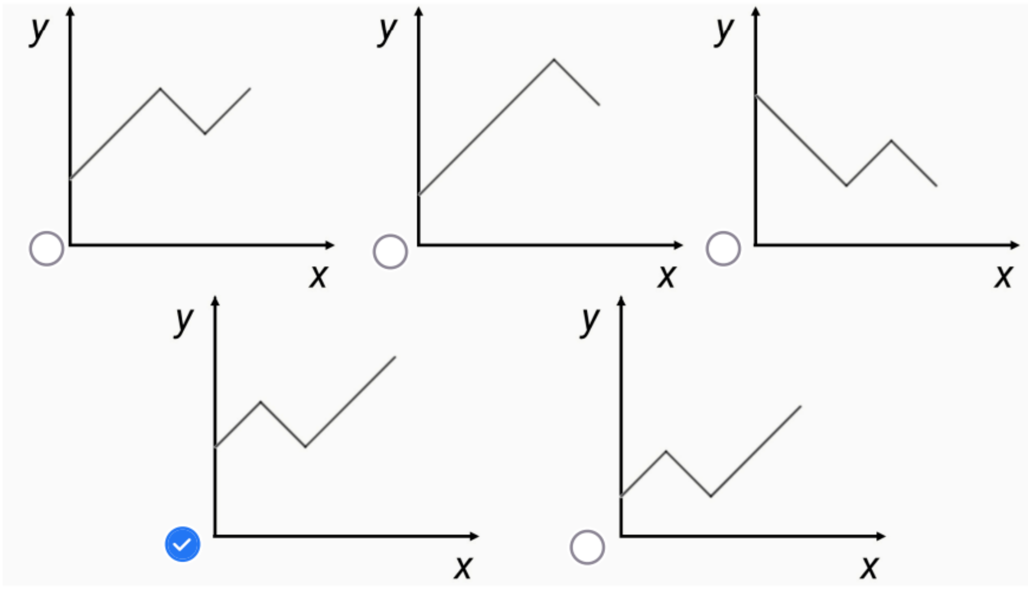
Условие:

Из проволоки сделаны два квадрата ACDE и EDFB. Точка M — середина отрезка CD, а точка P находится на отрезке AB.



Муравей хочет дойти от точки P до точки M кратчайшим путём по проволоке. Возьмём за x расстояние AP. Выберите график зависимости расстояния, которое проползёт муравей, от x:

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

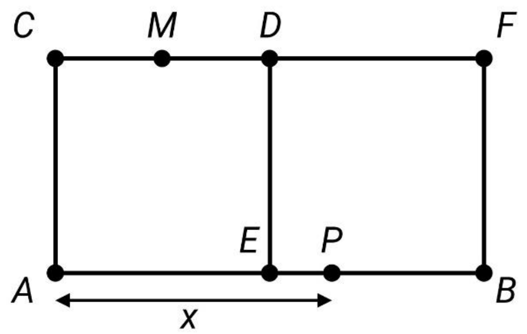
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

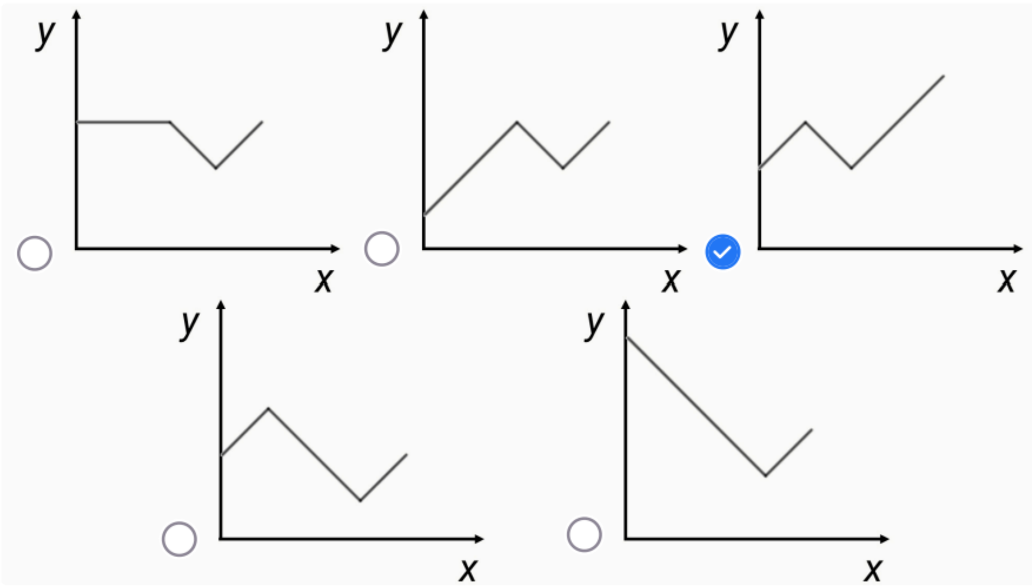
Условие:

Из проволоки сделаны два квадрата ACDE и EDFB. Точка M — середина отрезка CD, а точка P находится на отрезке AB.



Муравей хочет дойти от точки P до точки M кратчайшим путём по проволоке. Возьмём за x расстояние AP. Выберите график зависимости расстояния, которое проползёт муравей, от x:

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

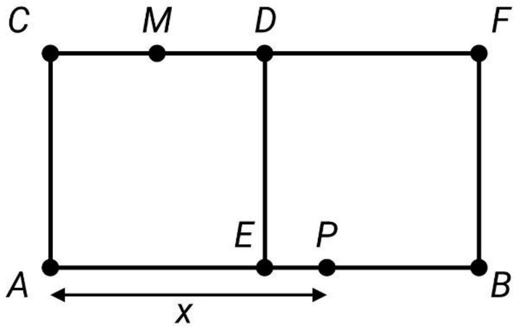
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

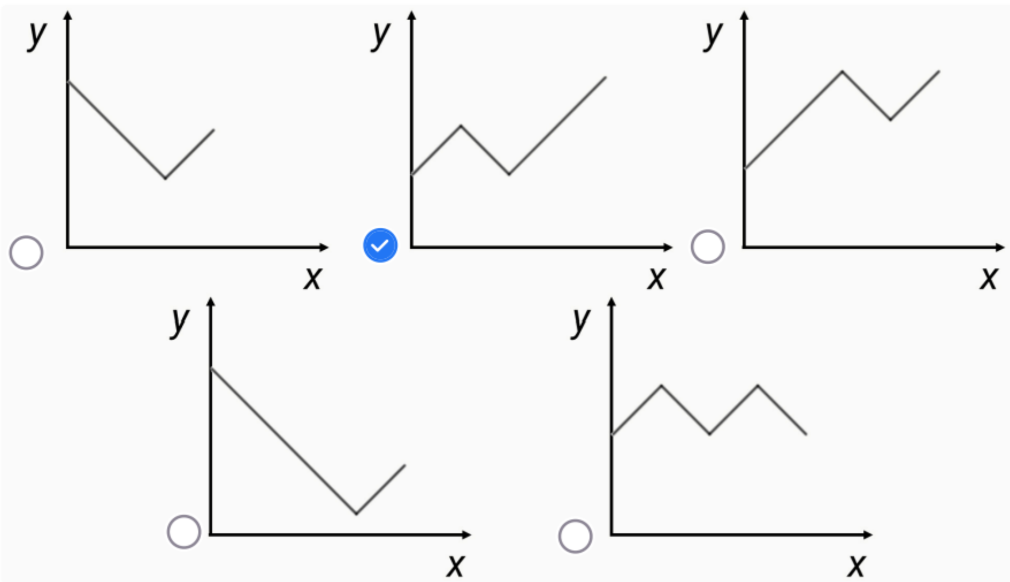
Условие:

Из проволоки сделаны два квадрата ACDE и EDFB. Точка M — середина отрезка CD, а точка P находится на отрезке AB.



Муравей хочет дойти от точки P до точки M кратчайшим путём по проволоке. Возьмём за x расстояние AP. Выберите график зависимости расстояния, которое проползёт муравей, от x:

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

В сказочной стране принято давать детям двойные имена. Имена не должны повторяться и должны идти в алфавитном порядке. Так, например, имя Анна Мария допустимо, а Анна Анна или Мария Анна — нет. В некоторой компании среди любых трёх людей есть хотя бы одна Анна, а среди любых пятерых — хотя бы одна Мария. Полных тёзок, совпадающих по обоим именам, нет. Какое наибольшее количество человек может быть в компании?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть в компании хотя бы 8 человек. Тогда среди них как минимум 6 Анн (иначе найдётся 3 не-Анны) и 4 Марии (иначе найдётся 5 не-Марий). Тогда множества Анн и Марий пересекаются на как минимум двух девушках, каждую из которых, согласно правилам, зовут Анна Мария. Тогда они полные тёзки, чего быть не должно. Значит, в такой компании не более 7 человек. Осталось привести пример, в котором их ровно 7:

Анна Виктория, Анна Жанна, Анна Марина, Анна Катерина, Анна Мария, Жанна Мария, Катерина Мария.

Задание № 4.2

Условие:

В стране гномов принято давать детям двойные имена. Имена не должны повторяться и должны идти в алфавитном порядке. Так, например, имя Алмаз Топаз допустимо, а Алмаз Алмаз или Топаз Алмаз — нет. В некоторой компании среди любых трёх людей есть хотя бы один Алмаз, а среди любых четверых — хотя бы один Топаз. Полных тёзок, совпадающих по обоим именам, нет. Какое наибольшее количество человек может быть в компании?

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

На Марсе принято давать детям двойные имена. Имена не должны повторяться и должны идти в алфавитном порядке. Так, например, имя Астра Вега допустимо, а Астра Астра или Вега Астра — нет. В некоторой компании среди любых пяти людей есть хотя бы одна Астра, а среди любых четверых — хотя бы одна Вега. Полных тёзок, совпадающих по обоим именам, нет. Какое наибольшее количество человек может быть в компании?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Дед Мороз с мешком конфет пришёл на праздник, где все дети были разного возраста. Каждый из детей, начиная со старшего, сделал следующее:

- раздал из мешка по 2 конфеты каждому ребёнку младше себя;
- взял одну конфету себе;
- из своих конфет положил в мешок по одной штуке для каждого ребёнка старше себя.

Когда Дед Мороз уходил, из 100 конфет у него в мешке осталось только 22. Сколько детей было на празднике?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть на празднике n детей. Если бы каждый взял по одной конфете для всех детей младше себя, то всего из мешка бы забрали $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. По две конфеты — вдвое больше. Аналогично, если класть в мешок по 1 конфете для старших, то всего будет положено $\frac{n(n-1)}{2}$ конфет.

Итого, дети:

- Взяли $n(n-1)$ конфет младшим
- Взяли n конфет себе
- Положили $\frac{n(n-1)}{2}$ конфет старшим

Значит из мешка забрано $n(n-1) + n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ конфет. С другой стороны, $\frac{n(n+1)}{2} = 100 - 22 = 78$, откуда $n(n+1) = 156$. Так как n — натуральное число, то единственный корень, который подходит, — это n = 12.

Задание № 5.2

Условие:

Дед Мороз с мешком конфет пришёл на праздник, где все дети были разного возраста. Каждый из детей, начиная со старшего, сделал следующее:

- раздал из мешка по 2 конфеты каждому ребёнку младше себя;
- взял одну конфету себе;
- из своих конфет положил в мешок по одной штуке для каждого ребёнка старше себя.

Когда Дед Мороз уходил, из 200 конфет у него в мешке осталось только 80. Сколько детей было на празднике?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.2

Условие:

Дед Мороз с мешком конфет пришёл на праздник, где все дети были разного возраста. Каждый из детей, начиная со старшего, сделал следующее:

- раздал из мешка по 2 конфеты каждому ребёнку младше себя;
- взял одну конфету себе;
- из своих конфет положил в мешок по одной штуке для каждого ребёнка старше себя.

Когда Дед Мороз уходил, из 200 конфет у него в мешке осталось только 80. Сколько детей было на празднике?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Дед Мороз с мешком конфет пришёл на праздник, где все дети были разного возраста. Каждый из детей, начиная со старшего, сделал следующее:

- раздал из мешка по 2 конфеты каждому ребёнку младше себя;
- взял одну конфету себе;
- из своих конфет положил в мешок по одной штуке для каждого ребёнка старше себя.

Когда Дед Мороз уходил, из 100 конфет у него в мешке осталось только 9. Сколько детей было на празднике?

Ответ: 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Дед Мороз с мешком конфет пришёл на праздник, где все дети были разного возраста. Каждый из детей, начиная со старшего, сделал следующее:

- раздал из мешка по 2 конфеты каждому ребёнку младше себя;
- взял одну конфету себе;
- из своих конфет положил в мешок по одной штуке для каждого ребёнка старше себя.

Когда Дед Мороз уходил, из 200 конфет у него в мешке осталось только 47. Сколько детей было на празднике?

Ответ: 17

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

Артём записал на доске четырёхзначное число — такое, что два старших и два младших разряда образуют последовательные двузначные числа (старшие разряды образуют меньшее из двузначных чисел). Известно, что записанное на доске число делится на 51. Какое именно число мог записать Артём? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 5253

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть меньшее из двузначных чисел равно n. Тогда число, образованное младшими разрядами, равно $(n+1)$, а четырёхзначное число равно $100n + (n+1) = $ $= 101n + 1$, по условию это выражение делится на 51. Заметим, что $102n$ тоже делится на 51, но тогда $102n - 101n - 1 = n - 1$ делится на 51. Поскольку n — двузначное число, значит, $n = 52$.

Задание № 6.2

Условие:

Артём записал на доске шестизначное число — такое, что три старших и три младших разряда образуют последовательные трёхзначные числа (старшие разряды образуют меньшее из чисел). Известно, что записанное на доске число делится на 501. Какое именно число мог записать Артём? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 502503

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

Артём записал на доске четырёхзначное число — такое, что два старших и два младших разряда образуют последовательные двузначные числа (старшие разряды образуют большее из чисел). Известно, что записанное на доске число делится на 51. Какое именно число мог записать Артём? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 5049

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

Артём записал на доске шестизначное число — такое, что три старших и три младших разряда образуют последовательные трёхзначные числа (старшие разряды образуют большее из чисел). Известно, что записанное на доске число делится на 501. Какое именно число мог записать Артём? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 500499

Точное совпадение ответа — 1 балл

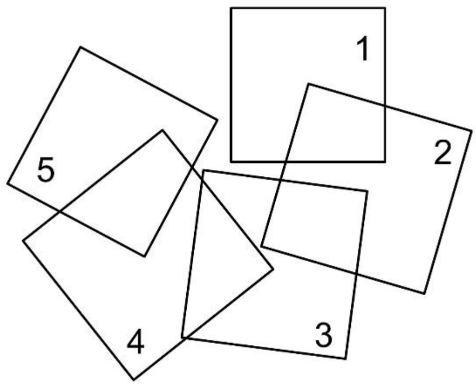
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Пять квадратов со сторонами 10 см, 12 см, 10 см, 14 см и 11 см с первого по пятый расположены так, что вершина каждого следующего находится ровно в центре предыдущего.



Найдите площадь, которую закрывают квадраты.

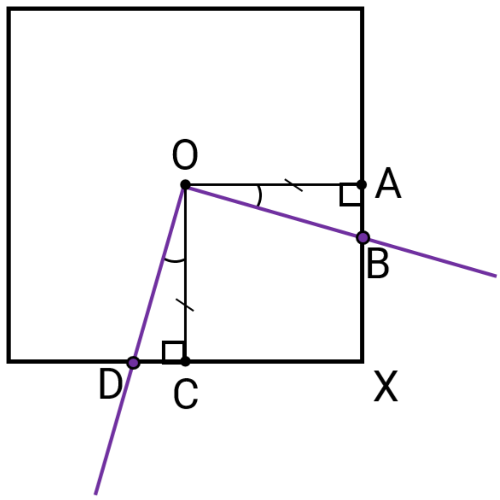
Ответ: 526

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Рассмотрим два соседних квадрата. Назовём левым тот квадрат, центр которого является вершиной другого, а следующий по номеру — правым. Заметим, что везде левый и правый квадраты перекрываются, и нигде нет накрытия в три слоя. Обозначим центр левого квадрата за O и опустим перпендикуляры на стороны, отметив их основания через A и C, а точки пересечения квадратов — через B и D, как показано на рисунке ниже. Тогда $\angle AOC = \angle BOD = 90°$, откуда $\angle AOB = \angle COD$. Значит, прямоугольные треугольники OAB и OCD равны по катету и острому углу, следовательно, площади четырёхугольников OBXD и OAXD равны. Тогда общая площадь двух квадратов всегда равна четверти площади левого.



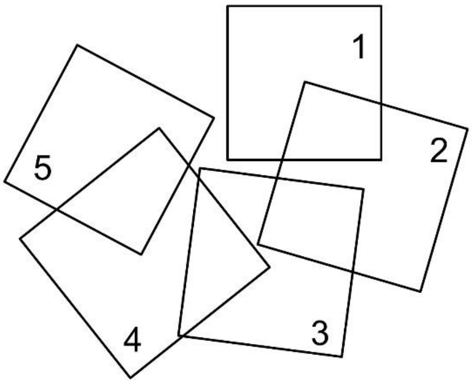
Теперь суммарную площадь квадратов можно вычислить как 3/4 площади каждого квадрата с первого по четвёртый вместе с полной площадью пятого:

$$75 + 108 + 75 + 147 + 121 = 526.$$

Задание № 7.2

Условие:

Пять квадратов со сторонами 10 см, 12 см, 12 см, 16 см и 12 см с первого по пятый расположены так, что вершина каждого следующего находится ровно в центре предыдущего.



Найдите площадь, которую закрывают квадраты.

Ответ: 627

Точное совпадение ответа — 1 балл

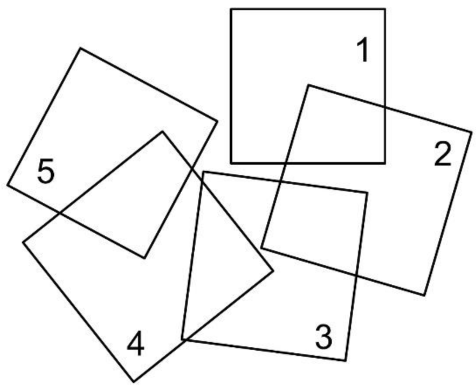
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Пять квадратов со сторонами 12 см, 10 см, 14 см, 12 см и 13 см с первого по пятый расположены так, что вершина каждого следующего находится ровно в центре предыдущего.



Найдите площадь, которую закрывают квадраты.

Ответ: 607

Точное совпадение ответа — 1 балл

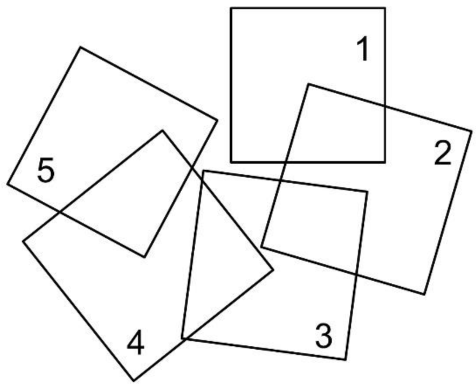
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Пять квадратов со сторонами 8 см, 12 см, 12 см, 16 см и 9 см с первого по пятый расположены так, что вершина каждого следующего находится ровно в центре предыдущего.



Найдите площадь, которую закрывают квадраты.

Ответ: 537

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Пусть числа a и b — корни квадратного уравнения $x^2 - mx + 2 = 0$, а числа $a + \frac{1}{b}$ и $b + \frac{1}{a}$ — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$. Найдите q.

Ответ: $\frac{9}{2}$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Из теоремы Виета для первого уравнения получим, что $ab = 2$. Теперь применим теорему Виета для второго уравнения:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Задание № 8.2

Условие:

Пусть числа a и b — корни квадратного уравнения $x^2 – mx + 4 = 0$, а числа $a + \frac{1}{b}$ и $b + \frac{1}{a}$ — корни уравнения $x^2 – px + q = 0$. Найдите q.

Ответ: $\frac{25}{4}$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Пусть числа a и b — корни квадратного уравнения $x^2 - mx + 2 = 0$, а числа $a + \frac{2}{b}$ и $b + \frac{1}{a}$ — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$. Найдите q.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Пусть числа a и b — корни квадратного уравнения $x^2 - mx + 2 = 0$, а числа $a - \frac{1}{b}$ и $b + \frac{2}{a}$ — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$. Найдите q.

Ответ: 2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1