

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ**

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

10 класс

Решения задач.

10.1. Избавимся от иррациональности в знаменателе. В результате получим в числителе $\sqrt{2025} - 1 = 45 - 1 = 44$.

Ответ: 44.

10.2. Очевидно, что n – нечетное число, тогда $n = 2k + 1$. Получим
 $4^n + n^4 = 4^{2k+1} + (2k+1)^4 = (2 \cdot 4^k + (2k+1)^2)^2 - 4 \cdot 4^k \cdot (2k+1)^2 = (2 \cdot 4^k + (2k+1)^2 - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1)) \cdot (2 \cdot 4^k + (2k+1)^2 + 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1))$.

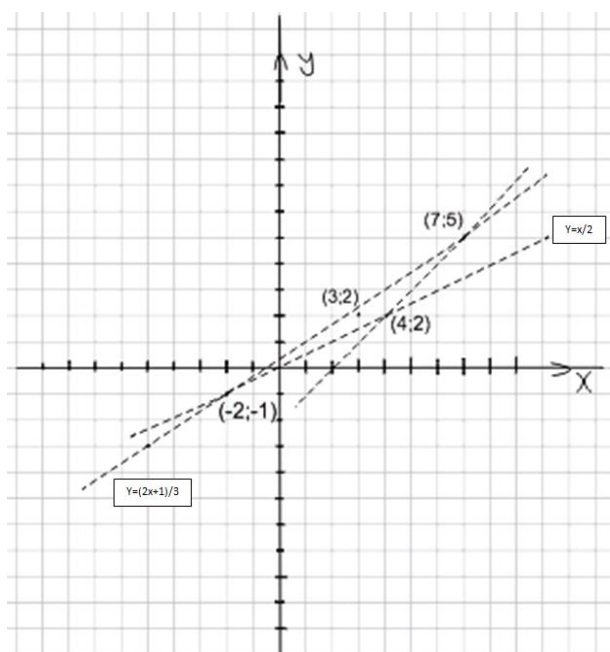
Чтобы это число было простым, меньший множитель должен быть равен 1. То есть $(2 \cdot 4^k + (2k+1)^2 - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1)) = 1$.

Но, $(2 \cdot 4^k + (2k+1)^2 - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1)) = 4^k + (2^k - (2k+1))^2 \geq 1$, равенство возможно лишь при $k = 0, n = 1$

Ответ: $n=1$

10.3. Построим в координатной плоскости область определения данного уравнения. В построенной области находится лишь одна единственная точка с целочисленными координатами $(3; 2)$. Подставим эти координаты в уравнение и убедимся в том, что это и есть его целочисленное решение.

Ответ: $(3; 2)$



10.4. Возможны три случая расположения точек А, В и С на прямой.

1) Точка А лежит между точками В и С. Тогда точка А находится внутри второй окружности и не существует прямой, проходящей через А и касающейся второй окружности.

2) Точка В лежит между точками А и С. Имеем $\angle ADB = \angle BEC = \angle AEO_2 = 90^\circ$, и $\angle DEB$, как угол между касательной и хордой равен $\angle ECB$. Треугольники подобны ВЕС и DEB по двум углам, откуда следует, что $\frac{BC}{BE} = \frac{BE}{BD}$. Отсюда $2R_2 = BC = \frac{BE^2}{BD} = 16$; $R_2 = 8$.

Отрезки BD и EO_2 параллельны, и по рис.1 должно выполняться неравенство $BD < EO_2$, а в тоже время $BD = 9$ и $EO_2 = R_2 = 8$. Значит, этот случай невозможен.

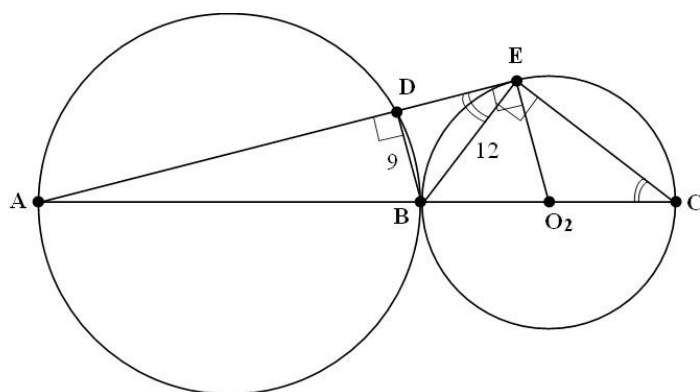


рис. 1

3) Точка С лежит между точками А и В (рис.2) Рассуждая также как в пункте 2, снова получаем $R_2 = 8$. Треугольники ABD и AEO_2 также подобны по двум углам. Отсюда следует, что $\frac{AB}{AO_2} = \frac{DB}{EO_2}$; $\frac{2R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{9}{R_2}$;

$$\frac{2R_1}{2R_1 - 8} = \frac{9}{8}; R_1 = 36.$$

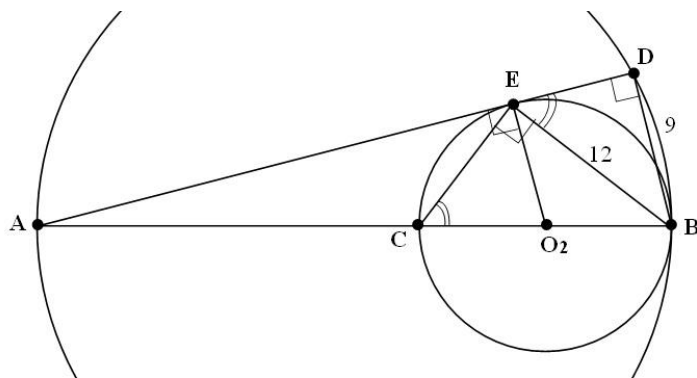


рис. 2

Ответ: 8; 36.

Комментарии:

Рассмотрены все три случая с полным обоснованием – 7 баллов

Рассмотрены второй и третий случаи с полным обоснованием – 6 баллов

Рассмотрен первый и второй или первый и третий случаи – 4 балла

Рассмотрен только второй или третий случай – 3 балла.

Рассмотрен только первый случай – 1 балл

10.5. Решение задачи состоит из двух частей: примера для 9 клеток и оценки, то есть доказательства того, что больше 9 клеток не может быть.

Пример: 9 клеток, среди которых закрашены третья и седьмая. Есть лишь три способа выбрать семь подряд идущих клеток, и две закрашенные в любом случае будут среди них. С другой стороны, любая четверка подряд идущих клеток содержит ровно одну закрашенную.

Оценка: Рассмотрим любые 8 подряд клеток. Среди них не более двух закрашенных. С другой стороны, среди первых семи из них не менее двух закрашенных. Значит, среди первых семи ровно две закрашенных, а последняя из выбранных нами 8 клеток не закрашена. То есть, если слева от какой-либо клетки есть еще 7, то она точно не закрашена. Аналогично для клетки, справа от которой есть еще 7 других.

Пусть у нас есть хотя бы 10 клеток. Рассмотрим 10 из них, забыв про остальные. Среди них хотя бы две закрашенные клетки. При этом первые три и последние три не закрашены, согласно предыдущему абзацу, а среди оставшихся четырех не более одной закрашенной. Получаем противоречие.

Ответ: 9