

10 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Вычислить значение выражения:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2022\sqrt{1 + 2023\sqrt{1 + 2024 \cdot 2026}}}}}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2022\sqrt{1 + 2023\sqrt{1 + 2024 \cdot 2026}}}}} = \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2022\sqrt{1 + 2023\sqrt{1 + (2025 - 1) \cdot (2025 + 1)}}}}} = \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2022\sqrt{1 + 2023 \cdot 2025}}}} = \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2022 \cdot 2024}}} = \dots = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{1 + 2 \cdot 4} = 3 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. В решении присутствует идея преобразования выражения $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$ – не менее 3 баллов. Вычислительная ошибка – не более 6 баллов.

2. Может ли сумма 2025 подряд идущих натуральных чисел и сумма 2029 следующих натуральных чисел оканчиваться на одинаковую цифру? Если нет, докажите это. Если да, приведите пример.

Решение. Сумма 2025 подряд идущих чисел равна

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \dots (n + 2024) = \frac{2n + 2024}{2} \cdot 2025 \\ = (n + 1012) \cdot 2025$$

Сумма 2029 следующих подряд идущих чисел равна

$$(n + 2025) + (n + 2026) + (n + 2027) + \dots (n + 2024 + 2029) = \\ \frac{2n + 2 \cdot 2024 + 2030}{2} \cdot 2029 = (n + 2024 + 1015) \cdot 2029 = (n + 3039) \cdot 2029.$$

Разница между этими числами равна

$$(n + 3039) \cdot 2029 - (n + 1012) \cdot 2025 = (4n + 1012 \cdot 2025) + 3039 \cdot 2029,$$

и это число нечетно (как сумма четного и нечетного чисел). Значит, разница чисел не может быть кратной 10, откуда следует, что последние цифры в двух суммах не могут быть одинаковыми.

Ответ: нет.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. Получено верное выражение для какой либо суммы: 3 балла. Нет ссылки на арифметическую прогрессию – не снижаем.

3. Робот находится в точке с координатой 0 на числовой прямой. Он делает последовательность из 20 шагов. Каждый шаг он с равной вероятностью сдвигается либо на +1 (вправо), либо на -1 (влево). Какова вероятность того, что после 20 шагов он окажется в точке с координатой 0, но при этом ни разу за всю прогулку не побывает в точке с координатой -1?

Решение.

Всего у робота 2^{20} вариантов путей. Найдем количество вариантов, удовлетворяющих условию. Во-первых, раз робот попал в точку 0, значит он сделал ровно 10 шагов влево и 10 шагов вправо, это можно сделать C_{20}^{10} способами. Теперь найдем число путей, проходящих через точку -1. Заметим, что это количество равно числу путей, заканчивающихся в точке -2, так как позиции «-2» и «0» симметричны относительно «-1». Число путей, заканчивающихся в точке -2 должно состоять из 11 шагов влево и 9 шагов вправо, значит оно равно C_{20}^9 . Количество путей, попадающих в точку 0 и не проходящих через -1, равно $C_{20}^{10} - C_{20}^9$. Искомая вероятность равна:

$$\frac{C_{20}^{10} - C_{20}^9}{2^{20}} = \frac{4199}{262144}.$$

Ответ: $\frac{C_{20}^{10} - C_{20}^9}{2^{20}} = \frac{4199}{262144}.$

Критерии. Только верный ответ – 1 балл (не суммируется со следующими), найдено общее количество вариантов – 1 балл, обосновано найдено число способов попасть в точку 0, не проходя через -1 – 5 баллов. За ответ, не записанный в числовой виде, баллы не снимать.

4. Изобразите все решения уравнения на плоскости (х,у):

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 32xy + 49 = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 32xy + 49 &= (x^2 + y^2)^2 + 49 + 2 \cdot 7 \cdot \\ (x^2 + y^2) - 16(x^2 + y^2 + 2xy) &= (x^2 + y^2 + 7)^2 - 16(x + y)^2 = \\ (x^2 + y^2 + 7 - 4(x + y))(x^2 + y^2 + 7 + 4(x + y)) &= (x^2 - 4x + y^2 - 4y + \\ 7)(x^2 + 4x + y^2 + 4y + 7) &= ((x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1)((x + 2)^2 + \\ (y + 2)^2 - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, искомое множество - объединение двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках (2,2) и (-2,-2).

Ответ. Объединение двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках (2,2) и (-2,-2).

Критерии. Только верный ответ или верный рисунок – 0 баллов, выделен полный квадрат $(x^2 + y^2)^2 - 1$ балл, выделен полный квадрат $(x^2 + y^2 + 7)^2 - 4$ балла. Приведены какие-либо другие равносильные записи данного уравнения, не помогающие в разложении на множители – 0 баллов.

5. На столе лежит коробок с N спичками. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2 или 4 спички. Игрок, который не может сделать ход (когда спичек не осталось), проигрывает. Для каких значений N у первого игрока есть выигрышная стратегия? Обоснуйте ответ.

Решение.

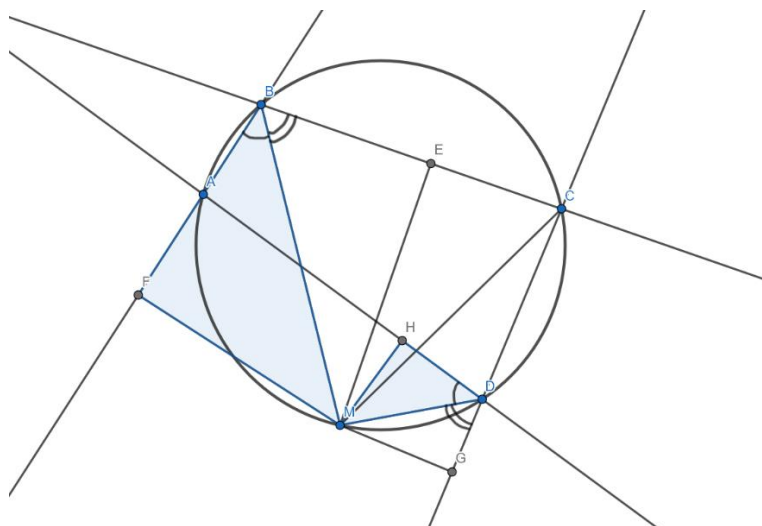
Докажем, что выигрывает игрок, назовем его (А), перед которым лежит число спичек, не кратное 3. В этом случае он берет 1 или 2 спички, так, чтобы количество спичек в коробке стало кратным 3 (в частности может остаться 0 спичек). Тогда, как бы не сходил второй игрок, (взяв 1,2 или 4 спички), то после его хода перед игроком (А) всегда будет число спичек, не кратное 3, а значит у игрока (А) будет возможность хода и он не проиграет. Поэтому, если перед первым игроком не кратное 3 число спичек, он выигрывает при описанной стратегии. Если перед ним кратное 3 число спичек, то после его хода перед вторым игроком будет не кратное 3 число спичек, и выиграет второй игрок.

Ответ: для всех N , не кратных 3.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов, не описана стратегия игрока – не более 4 баллов.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Точка M – произвольная точка окружности ω . Из точки M опустили перпендикуляры MF , ME , MG , MH на прямые, содержащие, соответственно, стороны AB , BC , CD , DA четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $MF \cdot MG = ME \cdot MH$.

Решение.



- 1) Заметим, что прямоугольные треугольники MFB и MHD подобны по острому углу, т.к. $\angle FBM = \angle HDM = \frac{1}{2}\widehat{AM}$, откуда $\frac{MF}{MH} = \frac{MB}{MD}$.
- 2) Заметим, что прямоугольные треугольники MEB и MGD так же подобны по острому углу, т.к. $\angle EBM = \frac{1}{2}\widehat{CM}$, $\angle HDM = 180^\circ - \angle CDM = 180^\circ - (180^\circ - \angle CBM) = \frac{1}{2}\widehat{CM}$, откуда $\frac{ME}{MG} = \frac{MB}{MD}$.
- 3) Из п.1 и п.2 $\frac{ME}{MG} = \frac{MF}{MH}$, откуда $ME \cdot MH = MG \cdot MF$. Что и требовалось доказать.

Замечание. При любом положении точки M на окружности при доказательстве подобия используется либо равенство острых углов как вписанных, опирающихся на одну дугу окружности, либо равенство, основанное на свойстве вписанного четырехугольника.

Критерии. Получено и доказано подобие двух ключевых треугольников - не более 3-х баллов.

Не указано, что пара подобий остается справедливой при любом положении точки M – не снижаем.