

10 класс

10.1. На доску выписывают последовательность цифр 121122111222111122221... Сколько единиц будет записано на позициях с 1 по 10101 включительно, считая слева?

Ответ. 5051.

Решение. Заметим, что сначала идет группа из 2 цифр (1 цифра «1» и 1 цифра «2»), потом группа из 4 цифр (2 цифры «1» и 2 цифры «2») и т.д. А всего в n группах $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot 2 = n(n+1)$ цифр, причём цифр «1» и «2» поровну. Так как $10100 = 100 \cdot 101$, то на первых 10100 местах стоит $10100:2 = 5050$ единиц. И на 10101 месте слева стоит цифра «1». Значит, на требуемых позициях всего будет записана 5051 единица.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.2. На городских соревнованиях по велосипедному спорту была придумана следующая схема проведения заездов: спортсмены вначале все едут одинаковое время – полчаса, а затем без остановки – дополнительное время, начисляемое по правилу: каждый получает в заезде дополнительное количество минут, равное расстоянию, которое он проехал за первые полчаса, измеренному в км. При подведении итогов выяснилось, что Василий за первые полчаса проехал на 6 км больше, чем Алексей, а по окончании заездов – на 11 км больше, чем Алексей. Найдите скорости езды Василия и Алексея, если эти скорости были постоянными.

Ответ. 19 км/ч и 31 км/ч.

Решение. Пусть S км – расстояние, которое проехал за полчаса Алексей, тогда Василий за это же время проехал $S + 6$ км. Пусть v км/ч – скорость Алексея, тогда $v + 12$ км/ч – скорость Василия (он проехал за полчаса на 6 км больше). Значит, Алексей суммарно ехал $\frac{S}{v} + \frac{v}{2 \cdot 60}$ ч, а Василий $\frac{S+6}{v+12} + \frac{v+12}{2 \cdot 60}$ ч. Умножая время движения на скорости v – Алексея и $v + 12$ – Василия, получаем $S + 6 + \frac{(v+12)^2}{2 \cdot 60} - \left(S + \frac{v^2}{2 \cdot 60}\right) = 11$, откуда $v = 19$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.3. При некотором значении параметра q уравнение $(x^2 + 10x + q)(x^2 + 10x + q + 18) = 0$ имеет четыре различных корня, и эти корни образуют арифметическую прогрессию. Каким может быть первый член этой прогрессии?

Ответ. $-9,5$ или $-0,5$.

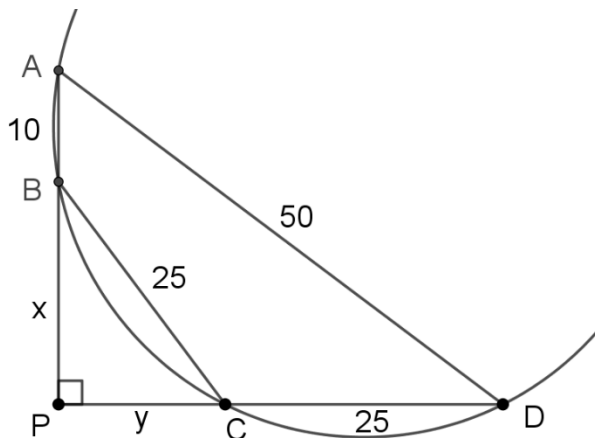
Решение. Пусть $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ – данные четыре корня, образующие арифметическую прогрессию. По теореме Виета сумма корней в каждом уравнении равна -10 . Поэтому эти четыре корня должны быть разбиты на две пары с одинаковой суммой. Значит, одна пара – это a и $a + 3d$, вторая – это $a + d$ и $a + 2d$. По теореме Виета произведения корней уравнений равны q и $q + 18$. Тогда разность этих произведений равна $(a + d)(a + 2d) - a(a + 3d) = 2d^2$. Откуда $2d^2 = (q + 18) - q = 18$ и $d = \pm 3$. Тогда из равенства $2a + 3d = -10$ при $d = 3$ получаем $a = -9,5$, а при $d = -3$ получаем $a = -0,5$.

Комментарий. Разобран только один случай разности $d = 3$ балла.

10.4. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = 10$, $BC = CD = 25$ и $AD = 50$. Известно, что сумма углов A и D этого четырёхугольника меньше 180° . Чему может равняться эта сумма?

Ответ: 90° .

Решение. Поскольку сумма углов BAD и ADC меньше 180° , то лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке P (см. рис.). Обозначим $PB = x$, $PC = y$. Поскольку $ABCD$ вписан, то треугольники PAD и PCB подобны, а раз $AD:BC = 50:25 = 2$, получаем, что $2x = y + 25$ и $2y = x + 10$, откуда $x = 20$ и $y = 15$. Таким образом, стороны треугольника PBC равны $15, 20, 25$, значит, он прямоугольный, откуда и заключаем, что $\angle PAD + \angle PDA = 90^\circ$.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.5. Артём задумал действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{15}$. После чего он в некотором порядке выписал какие-то из произведений (возможно, все) $a_1 a_2 a_3, a_2 a_3 a_4, \dots, a_{13} a_{14} a_{15}, a_{14} a_{15} a_1, a_{15} a_1 a_2$. Получился ряд из нечётных натуральных чисел $1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1$. Какое наибольшее k могло у него получиться?

Ответ. $k = 12$.

Решение. Покажем сначала, что Артём мог так задумать числа, что получится выписать 13 произведений требуемым образом, то есть $k = 12$. Сначала он выберет какие-то числа a_1, a_2, a_3 так, чтобы $a_1 a_2 a_3 = 1$. Затем подберет число a_4 так, чтобы $a_2 a_3 a_4 = 3$ (т.е. $a_4 = \frac{3}{a_2 a_3}$). И так далее до тех пор, пока он не подберет число a_{15} так, чтобы $a_{13} a_{14} a_{15} = 25$.

Докажем теперь, что невозможно подобрать числа так, чтобы получилось выписать 14 произведений. Рассмотрим три группы по пять произведений. В первую группу включим произведения $a_1 a_2 a_3, a_4 a_5 a_6, a_7 a_8 a_9, a_{10} a_{11} a_{12}, a_{13} a_{14} a_{15}$, во вторую – $a_2 a_3 a_4, a_5 a_6 a_7, a_8 a_9 a_{10}, a_{11} a_{12} a_{13}, a_{14} a_{15} a_1$, в третью – $a_3 a_4 a_5, a_6 a_7 a_8, a_9 a_{10} a_{11}, a_{12} a_{13} a_{14}, a_{15} a_1 a_2$. Произведение пяти чисел каждой группы равно $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{15}$. Если бы получилось выписать 14 произведений так, что они образовывали ряд $1, 3, 5, 7, \dots, 27$, то какие-то из этих чисел вошли бы в две группы (по пять произведений). Но из нечётных чисел от 1 до 27 нельзя выбрать 10 и разбить их на две группы по 5 с одинаковым произведением. Это следует из того, что среди этих чисел есть 5 простых: 11, 13, 17, 19 и 23, на которые не делится ни одно из оставшихся нечётных чисел от 1 до 27. А хотя бы одно из этих простых чисел должно попасть в эти два произведения (так как всего 14 нечётных чисел от 1 до 27).

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Показано, как получить $k = 12$ – 2 балла.

Доказано, что $k < 13$ – 5 баллов.