

Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2025 г.)

10 класс

1. Пусть $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Чему равно значение выражения $\frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^\Phi}{\varphi} + \frac{\Phi^\Phi \cdot \varphi^\varphi}{\Phi}$?

Решение. Легко показать, что $\Phi \cdot \varphi = 1$ и $\Phi = \varphi + 1$. Тогда

$$\frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^\Phi}{\varphi} = \frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^{\varphi+1}}{\varphi} = \frac{(\Phi \cdot \varphi)^\varphi \cdot \varphi}{\varphi} = \frac{1^\varphi \cdot \varphi}{\varphi} = 1.$$

$$\frac{\Phi^\Phi \cdot \varphi^\varphi}{\Phi} = \frac{\Phi^{\varphi+1} \cdot \varphi^\varphi}{\Phi} = \frac{(\Phi \cdot \varphi)^\varphi \cdot \Phi}{\Phi} = \frac{1^\varphi \cdot \Phi}{\Phi} = 1.$$

$$\text{Значит, } \frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^\Phi}{\varphi} + \frac{\Phi^\Phi \cdot \varphi^\varphi}{\Phi} = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

2. Найдите сумму $1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + 2025 \cdot (2025!)$.

Примечание. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, если $n \geq 2$ и $1! = 0$, $0! = 1$.

Решение. Приведем решение задачи в общем случае. Покажем, что $1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем сумму: } & 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + n \cdot (n!) = \\ & = (2-1)(1!) + (3-1)(2!) + \dots + (n-1)(n-1)! + ((n+1)-1)n! = \\ & = 2 \cdot (1!) + 3 \cdot (2!) + \dots + (n+1) \cdot (n!) - (1 \cdot (1!) + 1 \cdot (2!) + \dots + 1 \cdot (n!)) = \\ & = 2! + 3! + \dots + (n+1)! - 1! - 1 \cdot (2!) - \dots - n! = (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

В нашем случае $n = 2025$. Значит, сумму $1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \dots + 2025 \cdot (2025!) = 2026! - 1$.

Ответ: $2026! - 1$.

3. Найти все целые числа a, b, c , удовлетворяющие равенству:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 30.$$

Решение. Преобразовав данное равенство, получим: $3(a-b)(b-c)(c-a) = 30$ или $(a-b)(b-c)(c-a) = 10$. Значит, целые числа $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$ — делители числа 10, сумма этих делителей равна нулю. Не трудно убедиться, что таких делителей у числа 10 нет.

4. Первый член последовательности равен 2024. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 31. Найдите 2025-й член последовательности.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности. Получим: $a_1 = 2024$; $a_2 = 8 \times 31 = 248$; $a_3 = 14 \times 31 = 434$; $a_4 = 11 \times 31 = 341$; $a_5 = 8 \times 31 = 248$; $a_6 = 14 \times 31 = 434 = a_3$. Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, то далее члены последовательности будут повторяться с периодом 3. Число 2025 кратно трем, поэтому $a_{2025} = a_3 = 434$.

5. Точка F – середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE . Найдите $\angle CEF$.

Решение. Пусть прямая AE пересекает сторону CD квадрата в точке M (см. рисунок). Тогда треугольники ADM и DCF равны (по катету и острому углу). Следовательно, точка M – середина стороны CD . Значит, треугольник CFM – прямоугольный равнобедренный, поэтому $\angle CMF = 45^\circ$. Так как $\angle MEF = \angle MCF = 90^\circ$, то четырёхугольник $MCFE$ – вписанный. Поэтому $\angle CEF = \angle CMF = 45^\circ$.

