

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2025-2026 ГГ. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 10-Й КЛАСС

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1

1. УСЛОВИЕ. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами, причем $f(0)$ и $f(1)$ – нечетные числа. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет целых корней.

1. РЕШЕНИЕ. Предположим, что $x = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ – корень уравнения $f(x) = 0$. Тогда

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

откуда

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Из последнего равенства следует, что $a_n \vdots q$ и $a_0 \vdots p$ так как $(p, q) = 1$. При этом по теореме Безу $f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) g(x)$, где $g(x)$ – некоторый многочлен с целыми коэффициентами.

Отсюда $f(1) = \left(1 - \frac{p}{q}\right) g(1)$. Поскольку числа p и q взаимно простые, то $f(1) \vdots q - p$.

По условию задачи числа $f(0) = a_0$ и $f(1)$ нечетные, следовательно, числа p и $q - p$ нечетные. Отсюда q – четное и дробь $\frac{p}{q}$ нельзя сократить до целого числа. Следовательно, многочлен $f(x)$ не имеет целых корней.

Критерии. Задача полностью решена – 7 баллов. Доказано, что $a_n \vdots q$, $a_0 \vdots p$ и $f(1) \vdots q - p$ – 4 балла. Сделано предположение о рациональном корне – 1 балл.

ЗАДАЧА 2

2. УСЛОВИЕ. Доказать, что $(2^{3^n} + 1) \vdots 3^{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

2. РЕШЕНИЕ. Положим $K_n = 2^{3^n} + 1$. Тогда $K_1 = 2^3 + 1 = 9 \vdots 3^2$. Если при некотором $n = m$ $K_m = 2^{3^m} + 1 \vdots 3^{m+1}$, то

$$\begin{aligned} K_{m+1} &= 2^{3^{m+1}} + 1 = 2^{3^m \cdot 3} + 1 = (2^{3^m} + 1)^3 - 3 \cdot (2^{3^m})^2 - 3 \cdot 2^{3^m} - 1 + 1 = \\ &= K_m^3 - 3 \cdot 2^{3^m} (2^{3^m} + 1) = K_m^3 - 3 \cdot 2^{3^m} K_m = K_m (K_m^2 - 3 \cdot 2^{3^m}) \vdots 3^{m+2} \end{aligned}$$

так как $K_m \vdots 3^{m+1}$ и, следовательно, $K_m \vdots 3$, откуда $K_m^2 - 3 \cdot 2^{3^m} \vdots 3$.

Критерии. Задача полностью решена – 7 баллов. Доказано, что $K_{m+1} \vdots 3^{m+1}$ – 4 балла.

ЗАДАЧА 3

3. УСЛОВИЕ. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC и расположена на расстоянии x , y и z от трёх его сторон, а h – высота треугольника ABC . Выразите с обоснованием h через x , y и z .

3. РЕШЕНИЕ. Пусть a будет стороной равностороннего треугольника. Соединяя точку внутри треугольника с тремя вершинами мы разбиваем треугольник на три треугольника с площадями $ax/2$, $ay/2$ и $az/2$. Если сложить все эти площади то получим число равное площади всего треугольника $ah/2$. Отсюда следует, что $h = x + y + z$

Критерии. Задача полностью решена - 7 баллов. Есть первоначальное продвижение - 1 балл

ЗАДАЧА 4

4. УСЛОВИЕ. В турнире принимают участие 2026 участников. В первом круге турнира каждый участник играет только один раз, так что оказывается сыгранными 1013 игр парами игроков. Вычислить сколькими различными способами могли быть сформированы пары в первом круге.

4. РЕШЕНИЕ. Рассмотрим 4 участника. С первым участником могут сыграть любой из трёх остальных. После выбора пары для первого участника вторая пара определяется однозначно. Следовательно на 4 участников $3 * 1 = 3$ вариантов различных пар. Если участников 6, то с первым могут сыграть любые 5 участников. Остается 4 участника и повторяются рассуждения для 4 участников. Получается $5 * 3 * 1$ вариантов. Продолжая рассуждения приходим к выводу, что для 2026 участников вариантов будет $2025 * 2023 * 2021 * \dots * 5 * 3 * 1$

Критерии. Задача полностью решена - 7 баллов. Есть начальные продвижения в решении - 1 балл

ЗАДАЧА 5

5. УСЛОВИЕ. Определить m , при которых уравнение относительно x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

имеет четыре действительных корня, являющиеся членами арифметической прогрессии.

5. РЕШЕНИЕ. Если некоторые a и $-a$ корни, то прогрессия будет иметь вид

$$-3a, -a, a, 3a.$$

Следовательно

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим равенства:

$$10a^2 = 3m + 2,$$

$$9a^4 = m^2.$$

Исключение a дает $19m^2 - 108m - 36 = 0$. Следовательно $m_1 = 6$, $m_2 = -6/19$

Критерии. Задача полностью решена - 7 баллов. Найдено одно значение m , при котором корни образуют арифметическую прогрессию - 3 балла