

10 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. Можно ли расположить пятнадцать чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15 в клетках таблицы 3×5 так, чтобы суммы чисел в каждой строчке были одинаковы и суммы чисел в каждом столбце были одинаковы?

Ответ: нет.

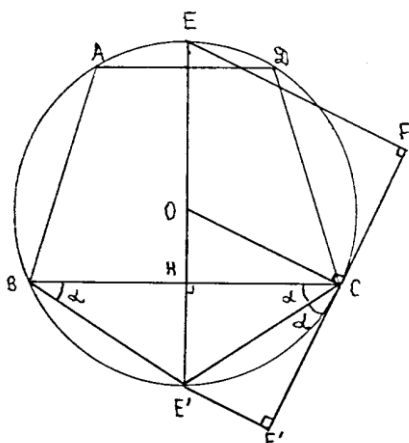
Решение. Пусть сумма чисел в каждой строке равна s . Тогда сумма всех чисел равна $3s$. Сумма данных чисел равна 115. Число 115 не делится на 3.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

10.2. Докажите, что если четыре простых числа p, q, r, s удовлетворяют неравенству $5 < p < q < r < s < p+10$, то их сумма делится на 60.

Решение. Между нечётными числами p и $p+10$ расположены четыре нечётных числа: $p+2, p+4, p+6, p+8$. Так как среди любых трёх подряд идущих нечётных чисел есть число, кратное трём, а четыре из пяти чисел $p, p+2, p+4, p+6, p+8$ простые, то число $p+4$ делится на 3 и $p+2 = q, p+6 = r, p+8 = s$. Кроме того, среди пяти нечётных чисел $p, p+2, p+4, p+6, p+8$ ровно одно делится на 5, поэтому $p+4$ делится на 5 и, следовательно, делится на 15. А тогда сумма $p + q + r + s = 4p + 16 = 4p(p+4)$ делится на 60.

Комментарии. Доказано, что $p+4$ делится на 3 – 2 балла. Доказано, что $p+4$ делится на 5 – 2 балла.



10.3. Трапеция $ABCD$, где $BC \parallel AD$, вписана в окружность, E – середина дуги AD этой окружности, не содержащей точку C . Пусть F – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую, касающуюся окружности в точке C . Докажите, что $BC = 2 \cdot CF$.

1-е решение. Обозначим за E' середину дуги BC , не содержащей точку A . Тогда EE' – диаметр, а точка O – середина EE' – центр описанной окружности. Обозначим за H точку пересечения EE' и BC , а за F' – основание перпендикуляра из точки E' на FC . Так как OC – средняя линия прямоугольной трапеции $F'E'EF$, а треугольники $CF'E'$ и CHE' равны по гипотенузе и острому углу, то $FC = F'C = CH = BC/2$.

2-е решение. Пусть H – середина хорды BC . Так как $\angle DCF = \angle DBC = \angle ACB$ и $\angle ECD = \angle EBD = \angle ECA$, то $\angle ECF = \angle ECH$. Прямоугольные треугольники ECF и ECH равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $CF = CH = BC/2$.

Комментарии. Оценивается по общим критериям.

10.4. Пусть A - множество натуральных чисел со следующим свойством: для любых двух элементов $m, n \in A$, $m \neq n$, выполняется неравенство $10|m - n| + 50 \geq mn$. Найдите максимально возможное количество элементов в A .

Ответ: 9.

Решение. Пусть $m > n$. Тогда $n \leq (50 + 10m)/(m + 10) = 10 - 50/(m + 10) < 10$. Значит, больше 10 чисел в наборе быть не может, причем 10 чисел может быть только в случае, когда для n можно выбрать любое натуральное число от 1 до 9, а $m > 9$. Однако для пары чисел 8 и 9 условие не выполняется, так как $10 \cdot (9 - 8) + 50 < 8 \cdot 9$, значит, натуральных чисел меньших 10 можно выбрать не более 8, а всего чисел не более 9. Подходит, например, набор чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 40\}$.

Комментарии. Доказано, что всего чисел в наборе не больше 9, но нет примера подходящего набора из 9 чисел – 4 балла. Только верный пример подходящего набора из 9 чисел – 3 балла. Если доказано только, что всего чисел в наборе не больше 10 – 1 балл.

10.5. Дано множество A из 100 натуральных чисел, каждое из которых не меньше 1 и не больше 6, и натуральное число $t \leq 100$. За один ход можно выбрать произвольные t чисел из A и увеличить на 1 каждое из них, если оно меньше 6, а каждое число, равное 6, заменить на 1. Найдите все значения t , для которых при любом множестве A найдётся такая конечная последовательность ходов, что в результате каждое из чисел станет равным 6.

Ответ: $t = 6k - 5$, $k = 1, 2, \dots, 17$ и $t = 6l - 1$, $l = 1, 2, \dots, 16$.

Решение. Предположим, что t - чётное число. Тогда после хода чётность суммы всех чисел не меняется. Пусть в множестве A находятся числа 1, 6, 6, ..., 6. Если при очередном ходе в наборе из t чисел проводим операцию для k чисел меньших 6 и для $t - k$ чисел, равных 6, то к исходной сумме из t чисел прибавляется число $k - 5(t - k) = 6k - 5t$, которое делится на 2, поэтому получить набор из всех чисел, равных 6, нельзя. Пусть теперь t - нечётное число, кратное 3. Тогда если при очередном ходе в наборе из t чисел проводим операцию для k чисел меньших 6 и для $t - k$ чисел, равных 6, то к исходной сумме из t чисел прибавляется число $k - 5(t - k) = 6k - 5t$, которое делится на 3, поэтому и в этом случае из набора 1, 6, 6, ..., 6 все числа, равные 6, получить нельзя. Пусть теперь t - любое число вида $6k - 5$ или $6l - 1$. Выбирая из множества A t чисел, не равных 6 (если они есть) за несколько ходов среди них можно получить хотя бы одно, равное 6. Продолжая действовать таким образом, всегда можно получить, не менее $101 - t$ чисел, равных 6. Покажем, что из оставшихся не более $t - 1$ чисел, не равных 6, можно выбрать любое число и через несколько ходов увеличить его значение на 1, не изменяя остальных чисел. Пусть x - выбранное число. Добавим к числу x еще любые t чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$. Рассмотрим два случая.

1) $t = 6k - 5$. Первым ходом изменим значения чисел $x, a_2, \dots, a_t$, вторым ходом изменим числа $x, a_1, a_3, \dots, a_t$ и т.д. За последний ход изменим числа $x, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}$. В результате каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ изменилось $t - 1 = 6k - 6$ раз, а значит, значение каждого из этих чисел оказалось равным исходному. Число x изменилось t раз, т.е. увеличилось на 1.

2) $t = 6l - 1$. За первые 5 ходов изменим значения чисел $x, a_2, \dots, a_t$, за следующие 5 ходов изменим числа $x, a_1, a_3, \dots, a_t$ и т.д. За последние 5 ходов этого вида изменим числа $x, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}$. Теперь для чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ сделаем 4 хода. В результате каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ изменилось $5(t - 1) + 4 = 30l - 6$ раз, а значит, значение каждого из этих чисел оказалось равным исходному. Число x изменилось $5t = 30l - 5$ раз, т.е. увеличилось на 1. Добавляя по очереди таким способом 1 к числам, не равным 6, можно получить все числа, равные 6.

Комментарии. Из 7 баллов 1 балл даётся за обоснование того, что t - нечётно; 1 балл даётся за обоснование того, что t не делится на 3; 2 балла даётся за обоснование того, что все числа вида $t = 6k - 5$ подходят; 2 балла даётся за обоснование того, что все числа вида $t = 6l - 1$ подходят; 1 балл даётся за правильный ответ.