

10 класс

1. Некоторое число при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 – остаток 1. Найти остаток от деления квадрата этого числа на 15.

Решение

Обозначим исходное число буквой a . $a = 3t + 2$; $a = 5l + 1$; $a^2 = 3t_1 + 1$; $a^2 = 5l_1 + 1$; $3t_1 = 5l_1$, НОД (3; 5) = 1, значит t_1 кратно 5, а l_1 кратно 3. Таким образом, остаток от деления квадрата исходного числа на 15 равен 1.

Критерии

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только приведен пример конкретного числа – 0 баллов;

Доказано, что квадрат исходного числа дает одинаковые остатки при делении на 3 и на 5 – 3 балла;

Если не обоснованно, что t_1 кратно 5 или l_1 кратно 3 – не более 5 баллов;

2. Решите неравенство: $x^4 + 2x^2 - x + 5 < 0$.

Решение

$x^4 + 2x^2 - x + 5 = x^4 + x^2 + (x^2 - x + 0,25) + 4,75 = x^4 + x^2 + (x - 0,5)^2 + 4,75 > 0$ при любом x . Значит, исходное неравенство не имеет решения.

Критерии

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

Если допущена ошибка в использовании формулы – не более 3 баллов за всю задачу.

3. 30 школьников участвовали в круговом шахматном турнире (каждый играет партию с каждым другим участником). Выигравший партию получает 1 очко, а проигравший – 0 очков, в случае ничьей каждый получает по 0,5 очков. Учащимся, которые набрали не менее 60% от максимально возможного числа очков, присваивался разряд. Какому наибольшему количеству участников мог быть присвоен разряд?

Решение

Оценка. Посчитаем количество партий: $30 \times 29 : 2 = 435$, значит, максимальное количество очков, которое может быть разыграно, составляет 435. Максимальное количество очков, которое может получить один участник турнира, – 29. $0,6 \times 29 = 17,4$. Значит, для получения разряда нужно набрать минимум 17,5 очков. $[435 : 17,5] = 24$, т.е. не более 24 человек смогут набрать не менее 60% от максимального числа очков.

Пример. Покажем, что 24 участника могут набрать по 17,5 очков. Для этого 24 человека должны сыграть между собой в ничью и набрать по $23 \times 0,5 = 11,5$ очков и выиграть у остальных шестерых, заработав по 6 очков. Таким образом, общее количество очков, набранное этими участниками, составляет 17,5.

Критерии

Найдено только количество партий и общее число очков – 1 балл.

В дополнение к предыдущему пункту найдено максимальное количество очков, которые может получить один участник, и количество баллов для получения разряда – 2 балла.

В дополнение к предыдущим двум пунктам выполнена оценка $[435:17,5] = 24 - 4$ балла.

Оценка + пример – 7 баллов.

При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – 6 баллов.

4. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . Точка H – точка пересечения высот треугольника. Найдите отношение расстояния от точки O до стороны BC к длине отрезка AH .

Указание: проведите диаметр AL .

Решение

Проведем диаметр AL .

$\angle ACL = \angle ABL = 90^\circ$ (опираются на диаметр AL).

$BH \perp AC \Rightarrow BH$,

$CH \perp AB \Rightarrow CH$.

Тогда $CHBL$ – параллелограмм (по определению). Отметим точку K пересечения его диагоналей. Тогда $LK = KH$.

Рассмотрим треугольник ALH : OK – средняя линия (по определению). Значит, $OK = \frac{1}{2} AH$, OK , а значит, $OK \perp BC$ и является расстоянием от точки O до BC . Тогда искомое отношение $OK:AH = 1:2$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Обосновано $\angle ACL = \angle ABL = 90^\circ$ без дальнейшего продвижения – 1 балл.

Доказано, что $CHBL$ – параллелограмм без дальнейшего продвижения – 3 балла.

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.

5. Из 100 одинаковых квадратов со стороной 1 составили плоскую фигуру (не обязательно выпуклый многоугольник). У каждого квадрата есть хотя бы один соседний квадрат, с которым он имеет общую сторону. Любые два квадрата либо имеют общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют ни общих сторон, ни общих вершин. Какой наибольший периметр у этой фигуры мог получиться?

Решение

Способ 1. Оценка. Рассмотрим граф, вершины которого – квадраты, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие квадраты имеют общую сторону. Этот граф должен быть связным, имеет 10 вершин, а значит, не менее $10-1=9$ ребер. Значит, $99 \times 2 = 198$ сторон у квадратов являются соседними. А всего у 100 квадратов 400 сторон. Поэтому $400 - 198 = 202$ стороны будут учитываться в периметре. Наибольший периметр – 202.

Пример. Полоска 1×100 .

Способ 2. Оценка.

Всего у 100 квадратов 400 сторон. Пусть эти квадраты образуют фигуру. Стороны этих квадратов разбиваются на 2 группы: соседние (к стороне квадрата прилежит сторона другого квадрата) и не соседние (не соседние стороны учитываются в периметре).

Будем собирать фигуру. При присоединении к фигуре квадрата добавляется минимум 2 соседние стороны. К первоначальному квадрату было присоединено 99 квадратов. Значит, к 0 соседних сторон добавилось минимум 198 соседних сторон. Значит, наибольший периметр $400 - 198 = 202$.

Пример. Полоска 1×100 .

Критерии

Только верный пример – 1 балл.

Верный пример и верная оценка, но в ней отсутствует обоснование, что наименьшее количество соседних сторон 198 – 3 балла.

Сделана верная и обоснованная оценка, но не приведен пример – решение оценивается в 6 баллов.

Верный пример и верная и полностью обоснованная оценка – 7 баллов.