

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025-2026 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

10 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой).

Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

1. На предприятии изготовлено 88 железобетонных плит по 3,2 т и 62 плиты по 3,8 т. Для транспортировки плит используют грузовики, в которые можно погрузить груз до 22 т. Какое наименьшее количество грузовиков потребуется, чтобы вывезти все плиты?

Ответ: 25 грузовиков.

Решение. В один грузовик нельзя погрузить 7 плит даже по 3,2 т ($3,2 \cdot 7 = 22,4$), по 3,8 т можно погрузить максимум 5 плит ($3,8 \cdot 6 = 22,8$). Всего плит 150 и по

3,8 т меньше, чем по 3,2 т, поэтому минимум потребуется $150/6 = 25$ грузовиков.

Пример: покажем, что 25 грузовиков хватит.

В каждый из 15 грузовиков погружаем 4 плиты по 3,8 т и 2 плиты по 3,2 т (всего 21,6 т), получаем 60 плит по 3,8 и 30 плит по 3,2.

В 1 грузовик погружаем 2 плиты по 3,8 т и 4 плиты по 3,2 т (всего 20,4 т).

В каждый из 9 грузовиков погружаем 6 плит по 3,2 т (19,2 т), получаем 54 плит по 3,2 т.

Комментарий. Верное обоснованное решение с оценкой и примером – 7 баллов. Найдено верное количество грузовиков и доказана минимальность без примера – 4 балла. Предложен только пример распределения плит по 25 грузовикам – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.

2. В выпуклом n -угольнике отметили вершины и середины сторон и провели отрезки, соединяющие эти точки. В итоге получилось 807 различных треугольников с вершинами в отмеченных точках. Определите, какие значения может принимать n ?

Ответ. $n=9$.

Решение. Имеем $2n$ точек. Число способов выбрать 3 точки из $2n$ точек равно $C_{2n}^3 = \frac{2n!}{(2n-3)!3!} = \frac{(2n-2)(2n-1)2n}{6}$. Но нам нужно не учитывать те тройки точек, которые лежат на одной прямой, таких троек ровно n (три точки на каждой стороне n -угольника).

Получаем, всего треугольников равно $\frac{(2n-2)(2n-1)2n}{6} - n = 807$.

Преобразуем уравнение, получаем: $4n^3 - 6n^2 - n - 2421 = 0$.

Уравнение имеет единственное натуральное решение $n=9$.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 7 баллов. Составлено верное уравнение, но не решено – 4 балла. Найдено $n=9$, но нет обоснования, что оно единственно – 5-6 баллов, Решение начато, используя правила комбинаторики, но не составлено уравнение - 1-3 баллов. Только ответ - 0 баллов.

3. На двух уроках технологии мальчики 10 А и 10 Б класса изготавливали черенки для лопат. Каждый урок каждый ученик получал по 6 заготовок для шести черенков. В первый урок каждый ученик 10 А класса изготовил на один черенок больше, чем каждый ученик 10 Б класса, а всего все ученики за первый урок изготовили 67 черенков. Во второй урок каждый ученик 10 А класса изготовил на один черенок меньше, чем каждый ученик 10 Б класса, а всего все ученики за второй урок изготовили 115 черенков. Сколько мальчиков в двух классах могли изготавливать черенки на уроках технологии, если в двух классах не более 60 учащихся?

Ответ. 26.

Решение. Пусть каждый мальчик из 10 А изготовил за первый урок x черенков, а за второй y черенков, тогда каждый мальчик из 10 Б за первый урок изготовил

$x-1$ черенков, а за второй $y+1$ черенков, а за два дня каждый ученик изготовил $x+y$ черенков. Число мальчиков равно общей сумме задач: $67 + 115 = 182$, делённой на $x+y$. Имеем, $182 = 14 \cdot 13 = 7 \cdot 26 = 2 \cdot 91 = 1 \cdot 182$, число мальчиков может равняться только 26 (так как число сделанных черенков у каждого не больше 12 и учеников больше одного, но не более 60).

Например, может быть 15 мальчиков из 10 А, сделавших за первый урок по 3 черенка, а за второй урок по 4 черенка, и 11 мальчиков из 10 Б, сделавших за первый урок по 2 черенка, а за второй урок по 5 черенков.

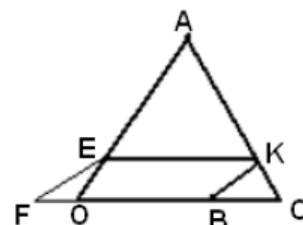
Комментарий. Верное обоснованное решение с примером – 7 баллов. Верное обоснованное решение без примера – 5 баллов. В верном решении есть еще ответ 13 и/или 14 – 4 балла. В верном решении есть еще и другие ответы (13, 14, 7, 2, 91, 182) – 3 балла. Решение верно начато, но число 182 не разложено на множители – 3 балла. Верная схема решения, но неверный ответ из-за ошибки в подсчётах – 2 балла. При отсутствии решения подбором найден ответ, без примера – 1 балл, с полным примером – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.

4. Два корабля с постоянными одинаковыми скоростями начинают одновременно двигаться из пунктов А и В, соответственно, вдоль прямых АО и ВО по направлению к пункту О. Пройдя пункт О, каждый корабль продолжает движение по своей прямой. Расстояние $AO=15$ км, $BO=11$ км, угол $AOB=60^\circ$. Каково наименьшее расстояние между кораблями во время движения?

Ответ: $2\sqrt{3}$ км.

Решение.

1 способ. Пусть корабли пройдут расстояние $d=AE=BF$, требуется найти расстояние EF , чтобы оно было наименьшим. Проведём через точку E прямую, параллельную OB , и отложим на ней отрезок EK , равный AE . Проведём прямую AK , пусть она пересекает прямую OB в точке C . Треугольник $AЕК$ равнобедренный с углом 60° , то есть равносторонний, значит, подобный ему треугольник AOC тоже равносторонний, $OA=OC=AC=15$. Четырёхугольник $EКBF$ – параллелограмм, так как $EК=AE=BF$, и $EК \parallel OB$. Значит, расстояние между кораблями, равное EF , равно $BК$, где K – текущая точка на прямой AC . Прямая AC определяется точками A и C , равноотстоящими от точки O на 15 км. Таким образом, надо найти кратчайшее расстояние от фиксированной точки B до прямой AC . Это расстояние измеряется по перпендикуляру, то есть корабли будут ближе всего друг к другу, когда $BК$ перпендикулярно AC . В прямоугольном треугольнике $BКС$ гипотенуза BC равна $15-11=4$ км, $\angle BСК=60^\circ$ значит, кратчайшее расстояние равно $4/2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ км.



2 способ. Пусть корабли пройдут расстояние, равное x км от пунктов А и В, соответственно. Тогда они будут находиться от пункта О на расстоянии $|15-x|$ и $|11-x|$, в точках, например Е и F. Тогда расстояние EF по теореме косинусов в

треугольнике EOF: $EF^2 = (15-x)^2 + (11-x)^2 - 2(15-x)(11-x)\cos 60$ (если треугольник остроугольный), либо $EF^2 = (15-x)^2 + (11-x)^2 + 2(15-x)(11-x)\cos 120$ (если треугольник тупоугольный). В обоих случаях $EF^2 = x^2 - 26x - 181$.

В правой части стоит квадратичная функция от x со старшим коэффициентом 1 (графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх), которая принимает наименьшее значение при x_0 – абсцисса вершины параболы, $x_0 = 26/2$. Тогда $EF^2 = 12$, $EF = 2\sqrt{3}$.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 7 баллов. При верном решении ответ неверный из-за ошибки в вычислениях в конце – 5 баллов. Рассмотрены варианты расположения кораблей, выбран правильный, но в нём не доказана минимальность – 4 балла. Решение не закончено, но есть продвижение – 1-3 баллов.

5. В саду на круглой клумбе радиуса 1 м посажены цветы в произвольном порядке. Можно ли найти 6 цветов на клумбе, все попарные расстояния между которыми больше 1 м.

Ответ: нет.

Решение. Допустим, что внутри круга радиуса 1 можно расположить шесть точек (цветов) так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1. Так как расстояние от центра круга радиуса 1 до любой его точки не превосходит единицы, то ни одна из этих шести точек не может совпадать с центром круга - О. Пусть $A_1, \dots, A_6$ — это данные точки, расположенные по часовой стрелке. Так как $\angle A_1OA_2 + \dots + \angle A_6OA_1 = 360^\circ$, то хотя бы одно из слагаемых не превосходит 60° , то есть $\angle A_iOA_{i+1} \leq 60^\circ$ для некоторого i . Таким образом, получаем, что точки A_i и A_{i+1} лежат в одном секторе с углом 60° . Но внутри такого сектора нет точек, расстояние между которыми больше радиуса круга, а значит, расстояние между этими точками не превосходит 1. Получаем, что невозможно найти шесть точек, все попарные расстояния между которыми больше 1 м.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 7 баллов. Показано, что ни один из цветков не находится в центре – 1 балл. В решении есть дальнейшие верные продвижения – 2-5 балла. Рассмотрены частные случаи расположения цветов – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.