

**Задания муниципального этапа  
всероссийской олимпиады школьников по математике  
в 2025-2026 учебном году**

**10 класс**

**Критерии оценивания**

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения                                                                                                                                   |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7     | Полное верное решение.                                                                                                                                               |
| 6-7   | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.                                                                                          |
| 5-6   | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4     | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.                                       |
| 2-3   | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.                                                                                                   |
| 0-1   | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).                                                                              |
| 0     | Решение неверное, продвижения отсутствуют.                                                                                                                           |
| 0     | Решение отсутствует.                                                                                                                                                 |

1. Фокусник расставил в клетках квадрата  $7 \times 7$  числа от 1 до 49 в произвольном порядке. Затем он записал на доске суммы чисел во всех строках, во всех столбцах и на двух больших диагоналях. После этого он увеличил все числа, написанные на доске, на единицу. Наконец, все числа, написанные на доске, фокусник перемножил. Может ли в результате получиться число, состоящее из одних двоек?

**Решение.** Нет, число, состоящее из одних двоек, получиться не может. Докажем это. Сумма всех чисел от 1 до 49 равна  $(49 \cdot 50) / 2 = 1225$ , то есть нечетна. Следовательно, хотя бы в одной строке и хотя бы в одном столбце сумма чисел будет нечетна. (Если сумма чисел во всех строках четна, то тогда, очевидно, будет четной и общая сумма всех чисел в квадрате, что неверно.) После увеличения на единицу нечетные числа становятся четными. Вывод: полученное в результате у фокусника число делится на 4. Осталось заметить,

что число, состоящее из одних двоек, заканчивается на 22, а значит, согласно признаку делимости на 4, на 4 не делится. Утверждение доказано.

*Комментарий.* Ответ без обоснования – 0 баллов.

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ .

Всегда ли треугольник  $A_1B_1C$  подобен треугольнику  $ABC$ ?

**Ответ.** Всегда.

**Решение.** Отрезок  $AB$  виден из точек  $A_1$  и  $B_1$  под прямым углом. Поэтому точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ . Пусть  $\angle ACB < 90^\circ$ . Тогда

$$\angle B = 180^\circ - \angle AB_1A_1 = \angle CB_1A_1.$$

Аналогично с углом  $\angle A$ . Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C$  подобны по двум углам.

*Комментарий.* Ответ без обоснования – 0 баллов. Сформулирована идея о двух вершинах и двух основаниях высот, лежащих на одной окружности – 2 балла.

3. У всех членов кружка филателистов вначале было одинаковое количество марок. В некоторый момент один из членов кружка часть своих марок раздал другим филателистам, причем всем дал одинаковое количество марок. Затем такую же операцию произвел еще один филателист и т. д. Может ли быть такое, что после нескольких таких операций у некоторых трех членов кружка будет 77, 88 и 111 марок?

**Решение.** Пусть  $n$  – количество филателистов. Пусть у трех филателистов сейчас имеется  $x$ ,  $y$  и  $z$  марок и пусть первый филателист раздает остальным членам кружка по  $t$  марок. Тогда в результате количество марок станет равно:

$$\text{у первого филателиста } x = x - (n - 1)t;$$

$$\text{у второго филателиста } y = y + t;$$

$$\text{у третьего филателиста } z = z + t.$$

Мы видим, что разность количества марок у второго и третьего филателистов не изменилась:

$$y' - z' = (y + t) - (z + t) = y - z,$$

а разность количества марок у первого и второго филателистов изменилась на величину, кратную  $n$ :

$$x' - y' = (x - (n - 1)t) - (y + t) = (x - y) - nt.$$

По условию задачи вначале все филателисты имели одинаковое количество марок, то есть в начальный момент все попарные разности количеств марок были равны нулю – а значит, были кратны  $n$ . Из сказанного выше следует, что эти разности всегда будут оставаться кратными  $n$ . Если предположить, что в некоторый момент времени некоторые три филателиста будут иметь 77, 88 и 111 марок, то тогда разности  $88 - 77 = 11$  и  $111 - 88 = 23$  должны делиться на  $n$ . Однако числа 11 и 23 не имеют общего делителя  $n \geq 3$  (по условию задачи число филателистов не менее трех).

*Комментарий.* Ответ без обоснования – 0 баллов. Сформулирована идея об инвариантности попарных разностей – 2 балла.

4. Графики функций  $f(x)=x^2+ax+b$  и  $g(x)=-x^2+cx+d$  не имеют общих точек.

Докажите, что на плоскости можно провести прямую, относительно которой они лежат по разные стороны.

**Решение.** Рассмотрим функцию

$$h(x)=(f(x)+g(x))/2 = x(a+c)/2+(b+d)/2.$$

Графиком  $h(x)$  является прямая. Докажем, что эта прямая искомая. Заметим, что при любом  $x_0$  расстояния от соответствующей точки прямой до графиков функций  $f(x)$  и  $g(x)$  по оси ординат равны, так как  $h(x_0)=(f(x_0)+g(x_0))/2$ . Тогда эта прямая не имеет с параболой общих точек. Действительно, если бы прямая пересекала первую параболу в какой-то точке  $(x_0, y_0)$ , то она бы пересекала и вторую параболу в той же точке, то есть графики  $f(x)$  и  $g(x)$  имели бы общие точки, что противоречит условию. Значит, прямая не пересекает параболы. Тогда исходные параболы лежат по разные стороны относительно этой прямой.

*Комментарий.* Построена прямая – 3 балла.

5. Число, большее 10, состоит из цифр 1, 3, 7, 9. Докажите, что оно делится на какое-нибудь простое число, большее 7.

**Решение.** Методом от противного: предположим, утверждение задачи не верно. Заметим, что на числа 2 и 5 исходное число делиться не может, так как иначе оно заканчивалось бы на 2 или 5. Тогда его простыми делителями могут быть только числа 3 и 7, т. е. число представляется в виде  $3^k \cdot 7^l$ . Докажем индукцией по  $(k+l)$ , что у чисел вида  $3^k \cdot 7^l$  в десятичной записи в разряде десятков стоит чётная цифра, тем самым получив противоречие с условием.

*База.*  $k+l = 0$ . У числа  $3^0 \cdot 7^0$  в разряде десятков стоит 0, т. е. чётное число.

*Переход.* Предположим, утверждение доказано для всех пар целых неотрицательных чисел  $(k, l)$ , таких, что  $k+l \leq n$ . Докажем утверждение для пар  $(k+1, l)$  и  $(k, l+1)$ , тем самым доказав утверждение для всех пар, сумма чисел в которых не больше  $n+1$ .

Пусть число  $A = 3^k \cdot 7^l$  имеет вид  $\overline{\dots x y}$ . Тогда у числа  $3A$  цифра в разряде десятков равна сумме последней цифры числа  $3x$  и предпоследней цифры числа  $3y$ . По предположению индукции,  $x$  чётно, поэтому последняя цифра  $3x$  тоже чётна. Кроме того,  $y$  может быть равен только 1, 3, 7 или 9. Заметим, что при умножении этих чисел на 3 получаются числа с чётной цифрой в разряде десятков. Значит, у числа  $3A$  в разряде десятков тоже будет чётная цифра. Для числа  $7A$  рассуждение аналогично.

*Комментарий.* Обоснованно предложен общий вид числа как разложения на степени тройки и семерки – 2 балла. На примерах показано наличие четной цифры в разряде десятков – 2 балла.