

10 класс. Решения

Верные решения оцениваются в 7 баллов.

1. Серёжа разбил все целые числа от 1 до 100 на три группы и посчитал суммы чисел в каждой группе. Могло ли так оказаться, что первый из результатов в три раза больше, чем второй, а второй — в три раза больше, чем третий? (Числа в группе не обязаны идти подряд.)

Ответ. Нет. **Решение.** Пусть сумма чисел в третьей группе равна S . Тогда суммы чисел во второй и первой группах равны $3S$ и $9S$ соответственно. Тогда сумма чисел в группах с одной стороны равна $13S$, а с другой $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$. Но 5050 не делится на 13. Значит, такое невозможно.

Критерии.

- Доказано, что сумма чисел в группах должна делиться на 13 — *3 балла*.
- Утверждается, что сумма чисел от 1 до 100 не делится на 13, но в подсчёте этой суммы допущена арифметическая ошибка — *не более 5 баллов*.

2. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. Турнир игрался по системе 3-1-0, то есть 3 очка за победу, 1 за ничью, 0 за поражение. Могло ли так случиться, что команда, занявшая первое место (набравшая больше очков, чем другие), при другой системе подсчёта очков 2-1-0, то есть 2 очка за победу, 1 за ничью, 0 за поражение, была бы последней (набрала меньше очков, чем другие)?

Ответ. Могло. **Решение.** Например, мог быть такой турнир. Пусть в нём было 19 команд, команда A выиграла 7 матчей и 11 проиграла, а остальные матчи закончились в ничью. Тогда команда A набрала 21 очко, а остальные или $3 + 17 = 20$ или $0 + 17 = 17$ (в зависимости от того, как они сыграли с A). То есть при системе 3-1-0 команда A выиграла. А при системе 2-1-0 команда A заработает 14 очков, а остальные или $2 + 17 = 19$, или $0 + 17 = 17$. То есть при системе 2-1-0 команда A проиграла.

Критерии.

• Приведён пример турнира, в котором при системе 3-1-0 есть несколько команд, занявших 1 место, или при системе 2-1-0 есть несколько команд, занявших последнее место — *не более 3 баллов*.

3. Существуют ли пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e , что среди дробей $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{d}, \frac{c}{e}, \frac{d}{e}$ ровно две несократимы?

Ответ. Существуют. **Решение.** Например, подойдет такой набор различных чисел: $a = 2, b = 6, c = 3, d = 7, e = 11$. Нетрудно убедиться, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$ сократимы, а у любой другой пары чисел нет общих простых множителей, то есть оставшиеся 8 дробей несократимы.

Критерии.

• Неправильный пример — *0 баллов*.

4. В треугольнике ABC ($AB < BC$) угол B в 2 раза больше угла C . На стороне BC отмечена точка X так, что $AB = CX$. Окружность ABX вторично пересекает сторону AC в точке T . Докажите, что BT — биссектриса угла ABC .

Решение. Пусть BL это биссектриса угла B треугольника ABC . Тогда $\angle ABL = \angle CBL = \angle BCL$, откуда $BL = LC$. Следовательно, треугольники ABL и XCL равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle CXL = \angle BAL$, откуда получаем, что четырёхугольник $ABXL$ вписанный. Тогда окружность ABX вторично пересекает сторону AC в двух точках: L и T . Это может быть только в одном случае, когда $L = T$. Значит, BT является биссектрисой угла ABC .

5. У Вероники и Максима есть 2024 карточки, на которых написаны числа $1, 2, \dots, 2024$ (на каждой по одному числу). Ребята раздают по 1012 карточек каждому, после чего начинают играть, первым ходит Максим. За ход игрок выкладывает на стол одну из своих карточек. Игрок выигрывает, если после его хода сумма чисел на всех карточках на столе делится на 2025. Можно ли раздать карточки игрокам так, чтобы Максим мог победить, как бы ни играла Вероника?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Достаточно предъявить стратегию за Веронику, при которой она не проиграет. Первым ходом Максим выиграть не может, а после каждого его хода у Вероники на одну карточку больше, чем у Максима. Но для каждого хода Вероники может быть не

более одного ответного хода Максима, приводящего его сразу к победе, так как для каждого остатка при делении на 2025 у Максима есть не более одной карточки с таким остатком. Следовательно, Вероника всегда может сделать такой ход, чтобы не проиграть после следующего хода Максима.