

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
10 класс

Задача 10.1

Условие:

Внутри клетчатого прямоугольника размером 20×25 Олег решил закрасить другой прямоугольник (то есть отличающийся от исходного). Сколькими способами он может это сделать? Заметим, что 1) прямоугольники одинакового размера, находящиеся в разных местах, считаются различными, 2) закрашиваемый прямоугольник может иметь с исходным часть общей границы.

Ответ. 68249

Решение:

Рассмотрим линии, которые служат границами прямоугольников. Так как исходный прямоугольник имеет размер 20×25 , то можно считать, что всего 21 горизонтальная линия и 26 вертикальных линий. Закрашиваемый прямоугольник определяется граничными линиями. Количество способов выбора двух горизонтальных линий из 21 равно $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$, количество способов выбора двух вертикальных линий из 26 равно $\frac{26 \cdot 25}{2} = 325$. Всего клетчатых прямоугольников будет $210 \cdot 325 = 68250$. Так как исходный прямоугольник не закрашивается, то искомое число способов равно 68249.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

Логически верное решение, правильно определено количество горизонтальных (21) и вертикальных (26) линий, но не верно найдено общее количество способов выбора горизонтальных и вертикальных линий – 4 балла

Логически верное решение, но допущена вычислительная ошибка на последнем шаге, ставить 6 баллов

Задача 10.2

Условие:

Решить уравнение $x^3 - y^3 = xy + 61$ в натуральных числах x и y .

Ответ: $\{(6,5)\}$.

Решение:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
10 класс

1 способ

Очевидно, что $x > y$. Пусть $x = y + d$, где $d \geq 1$. Подставим это выражение для x в исходное уравнение, получим соотношение

$$\begin{aligned}d^3 + 3y^2d + 3yd^2 - y^2 - yd &= 61 \\(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 &= 61.\end{aligned}$$

Откуда $d^3 \leq 61$, или $d \leq 3$. Итак, для d мы имеем три возможных значения: $d = 1, 2, 3$. Соответственно имеем три квадратных уравнения:

- 1) $2y^2 + 2y - 60 = 0$ ($d = 1$),
- 2) $5y^2 + 10y - 53 = 0$ ($d = 2$),
- 3) $8y^2 + 24y - 34 = 0$ ($d = 3$).

Целочисленное решение есть только у первого уравнения:

$y = 5$, $y_2 = -6$. Только первое из них положительно. Соответствующее ему значение $x = 6$.

2 способ

Ясно, что $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \geq 3xy(x - y)$, откуда $xy(3(x - y) - 1) \leq 61$.

Пусть $x - y = 1$.

Тогда уравнение имеет вид $2y^2 + 2y + 1 = 61$, или $y^2 + y = 30$, откуда $y = 5$, $x = 6$.

Если $x - y = 2$, то имеем уравнение $5y^2 + 10y + 8 = 61$, которое в целых числах неразрешимо.

Следовательно, $x - y \geq 3$ и $3(x - y) - 1 \geq 8$, откуда $xy \leq 8$, так как верно неравенство $xy(3(x - y) - 1) \leq 61$.

Имеем $x > y \geq 1$. Пусть $y = 1$, тогда уравнение принимает вид:

$$x^3 - x = 62.$$

Оно не имеет целых решений, так как $x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$ делится на 3, а число 62 на 3 не делится. Теперь условию $xy \leq 8$ удовлетворяют еще только две пары чисел (3, 2) и (4, 2), однако они не удовлетворяют условию $x - y \geq 3$.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 1 балл

Задача 10.3

Условие:

На доске написаны числа 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b , то можно дописать число $ab + a + b$. Можно ли этим способом получить число 13121.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
10 класс

Ответ: да

Решение:

Обозначим дописываемое число $ab + a + b$ через c . Тогда
$$c + 1 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1).$$

Значит, если вместо чисел, написанных на доске, рассматривать числа, на единицу большие, то каждое новое число будет получаться как произведение двух уже имеющихся. Так как начинаем мы с чисел 2 и 3, то после нескольких умножений получим число вида $2^n \cdot 3^m$, где n и m – натуральные числа. Ясно, что могут быть все числа такого вида, и только они. Значит, в исходной ситуации могут быть получены только числа вида $2^n \cdot 3^m - 1$. Число 13121 таковым является: $13122 = 2 \cdot 3^8$.

Дополнительные критерии:

Показано, что на доске появляются числа вида $2^n \cdot 3^m - 1$, далее продвижения нет – 3 балла

Задача 10.4

Условие:

В футбольном турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров – каждая команда сыграла с восьмью разными командами. Доказать, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

Решение:

Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с 8 командами и с 9 не сыграла. Если среди этих девяти последних есть две не сыгравшие между собой, то все доказано. Предположим, что это неверно. Тогда все эти девять команд сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть 36 матчей. Однако в каждом туре они могут сыграть между собой только 4 матча и всего за 8 туров 32 матча. Мы видим, таким образом, что все эти девять команд не могли сыграть между собой, а потому три искомые команды найдутся.

Задача 10.5

Условие:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
10 класс

Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм.

Решение:

Треугольники BCD и ABD имеют, согласно условию, равные площади и общее основание BD , т.е. расстояние от точек A и C до стороны BD равно. Значит, диагональ BD пересекает AC по середине. Аналогично для треугольников ABC и ACD . Диагональ AC пересекает BD по середине. Четырехугольник, у которого диагонали делятся точкой пересечения пополам, есть, как известно, параллелограмм.

Дополнительные критерии:

Рассмотрение частного случая – 0 баллов