

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)
Максимальное количество баллов – 42 балла**

Решения и критерии

1. Что вероятнее получить: 6 очков при одном броске одного игрального кубика или 6 очков в сумме при одном броске двух игральных кубиков?

Ответ. На одном кубике.

Решение. Вероятность получить 6 очков на одном кубике равна $\frac{1}{6}$. Тогда как на двух кубиках можно получить 6 очков в сумме с вероятностью $\frac{5}{36}$ (всего исходов 36, благоприятных 5 (1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1)).

Критерии. Верное решение, содержащее пояснения почему вероятности равны $\frac{5}{36}$ и $\frac{1}{6}$ – **7 баллов**. В решении указаны вероятности $\frac{5}{36}$ и $\frac{1}{6}$, но нет объяснений почему они такие – **5 баллов**. Только верный ответ – **1 балл**. Иначе – **0 баллов**.

2. Числа a, b, c, d, e образуют геометрическую прогрессию, причем среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Может ли рациональных чисел быть четыре?

Ответ. Нет.

Решение. Так как рациональных чисел 4, то какие-то два из них идут в прогрессии подряд. Но тогда знаменатель прогрессии - рациональное число, а значит и все числа рациональны. Противоречие.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Иначе – **0 баллов**.

3. На равнине Ахиллес в 9 раз быстрее черепахи. При подъеме в гору скорость любого поднимающегося уменьшается в некоторое число раз, а при спуске с горы увеличивается в такое же число раз. Если Ахиллес пойдет в гору, а черепаха, одновременно с ним, пойдет с горы, то они встретятся на середине подъема. Какую часть пути до встречи пройдет Ахиллес до встречи, если он будет спускаться с горы, а черепаха подниматься?

Ответ: $\frac{81}{82}$.

Решение. Пусть при движении по горе скорость меняется в a раз. Так как Ахиллес и черепаха встретились посередине, то их скорости равны, то есть $V_a/a = V_c/a$. А так как $V_a = 9V_c$, то $a = 3$. Тогда с горы скорость Ахиллеса будет равна $3V_a = 27V_c$, а скорость черепахи $V_c/3$. То есть скорость Ахиллеса с горы в 81 раз больше, чем скорость черепахи. Значит он пройдет $\frac{81}{82}$ пути.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Верно составлены необходимые уравнения и получен неверный ответ из-за арифметических ошибок – **5 баллов**. Верно найдено a – **2 балла**. Верный ответ – **1 балл**. Иначе – **0 баллов**.

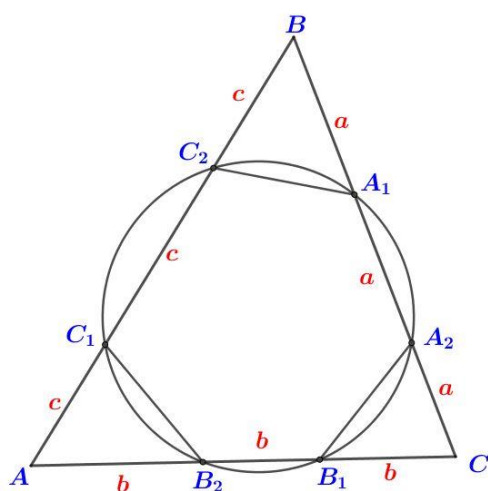
4. На доске написаны n чисел. Оказалось, что среднее арифметическое любых двух, трёх, четырёх и так далее до n из этих чисел также записано на доске. Докажите, что все числа равны.

Решение. Пусть не все числа равны. Рассмотрим самое большое число – A и следующее по величине – B ($B < A$). Тогда их среднее арифметическое $(A+B)/2$ тоже должно быть на доске. Но $B < (A+B)/2 < A$, что противоречит выбору B .

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Иначе – **0 баллов**.

5. Окружность пересекает каждую сторону треугольника в двух точках, причем каждая сторона делится точками пересечения на три равных части. Докажите, что все шесть точек пересечения окружности со сторонами треугольника образуют правильный шестиугольник.

Решение. Пусть точки пересечения окружности со сторонами AB , BC и CA –



это $C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2$ считая по часовой стрелке от A . Тогда по условию $AC_1 = C_1C_2 = C_2B = c$, $BA_1 = A_1A_2 = A_2C = a$, $CB_1 = B_1B_2 = B_2A = b$. Если провести из точки A касательную к окружности и записать теорему о квадрате касательной, получим $2b^2 = 2c^2$. Откуда $b = c$, аналогично $a = b = c$. Таким образом, треугольник ABC – равносторонний. Значит и треугольники AC_1B_2, BA_1C_2 и CB_1A_2 – тоже равносторонние. Значит, все стороны шестиугольника $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$ равны и все углы по 120 градусов. Этого достаточно, чтобы сказать, что шестиугольник правильный. (Комментарий: для обоснования

того, что шестиугольник правильный, достаточно пересечь биссектрисы двух соседних углов в точке O , далее легко показать, что O – центр окружности описанной около $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$. Но этого рассуждения мы не требуем от школьника).

Критерии. Показано, что все стороны и все углы шестиугольника равны – **7 баллов**. Доказано равенство всех сторон или всех углов – **3 балла**. Иначе – **0 баллов**.

6. Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Назовём действительное число a забавным, если из чисел $f(a)$, $g(a)$ и $h(a)$ одно равно сумме двух других. Найдите наибольшее возможное количество забавных чисел.

Решение. Пусть a – забавное число, тогда a – корень одного из трех приведенных многочленов $f+g-h$, $f+h-g$ или $h+g-f$. У каждого из них не более, чем два корня, поэтому забавных чисел не более, чем 6. Если взять трехчлены $x^2 - 2, x^2 - 3, x^2 - 4$, то забавными числами будут $\pm 1, \pm\sqrt{3}$ и $\pm\sqrt{5}$.

Критерии. Верное решение – **7 баллов**. Доказано, что забавных чисел не более, чем 6 – **3 балла**. Приведен пример, когда забавных чисел 6 – **3 балла**. Иначе – **0 баллов**.