

Задачи муниципального этапа 2025-2026 учебного года

10 класс

10.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, которые делятся на 17 и оканчиваются на 17?

Решение. Обозначим четырёхзначное число $\overline{xy17}$. Тогда число $\overline{xy17} - 17$ тоже делится на 17. Но тогда $\overline{xy17} - 17 = 100 \cdot \overline{xy} + 17 - 17 = 100 \cdot \overline{xy}$. Так как числа 100 и 17 являются взаимно простыми, то двузначное число $\overline{xy}$ делится на 17. Перебором находим все двузначные числа, делящиеся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Их всего пять. Тогда искомым чисел также будет пять.

Ответ: 5.

10.2. Известно, что $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$. Найдите $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Решение.

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = \frac{c + (a+b)}{a+b} + \frac{a + (b+c)}{b+c} + \frac{b + (c+a)}{c+a} = \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1$$

.

Тогда $7 \cdot \frac{7}{10} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + 3$. Значит, искомая сумма равна $7 \cdot \frac{7}{10} - 3 = \frac{19}{10}$.

Ответ: $\frac{19}{10}$.

10.3. От двух кусков сплава серебра и золота (с различным содержанием золота) массой в 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавляли с остатком другого куска, после чего процентное содержание золота в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

Решение. Пусть p и q - первоначальные доли золота в первом и втором кусках соответственно, x - масса отрезанного куска. Тогда доля золота в сплаве отрезанной первой части с остатком второго равна $\frac{xp + (12-x)q}{12}$, а в сплаве отрезанной части второго куска с остатком первого равна $\frac{xq + (6-x)p}{6}$.

Приравнивая эти доли, получаем $3x(p-q)=12(p-q)$. По условию $p \neq q$, следовательно, $x=4$.

Ответ: 4 кг.

10.4. Прямоугольный треугольник ABC (катет BC больше катета AC) вписан в окружность. На стороне BC выбрана такая точка D , что $BD=AC$, точка M – середина дуги ACB . Найдите угол CDM .

Решение. Заметим, что AB – диаметр описанной окружности. Соединим точку M с точками A , B , C и D . Так как дуги AM и BM равны, то равны и хорды AM и BM , которые их стягивают. Отрезки BD и AC равны по условию. Наконец, углы MBC и MAC равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким образом, треугольники MBD и MAC равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует равенство сторон MD и MC , а значит, треугольник MCD – равнобедренный. Остаётся заметить, что $\angle MCD = \angle MCB = \angle MAB = 45^\circ$, так как дуга MB равна половине окружности.

Ответ: 45° .

10.5. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трёх цветов?

Решение. Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую – одной из двух оставшихся. Третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первая доска 3 варианта, вторая 2, далее однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

Ответ: 1530 способами.