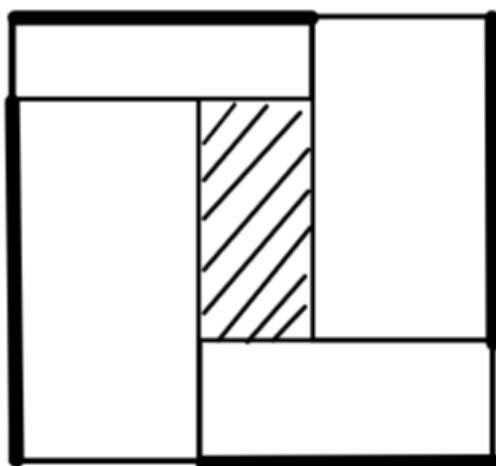


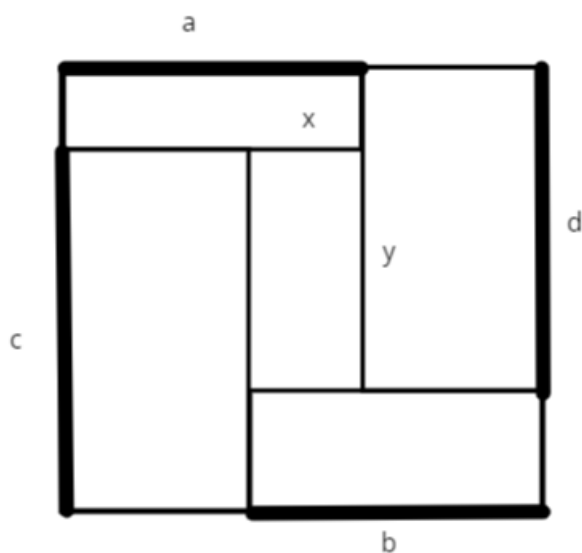
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
Рязанская область

10 класс

1. Дан квадрат со стороной 2025. Найдите периметр заштрихованного прямоугольника, если сумма длин выделенных отрезков равна 7075.



Решение.



Обозначим выделенные отрезки соответственно a , b , c , d , а длины сторон прямоугольника x и y . Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = x + 2025 \\ c + d = y + 2025 \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $a + b + c + d = x + y + 4050$

Левая часть уравнения равна 7075 (по условию). Тогда $3025 = x + y$.

Тогда периметр заштрихованного прямоугольника равен 6050.

Ответ: 6050.

2. Известно, что $a^2 + b^2 = 3ab$ и $a > b > 0$. Вычислите $\frac{a+b}{a-b}$

Решение.

Так как по условию $a^2 + b^2 = 3ab$, то $a^2 + 2ab + b^2 = 5ab$ и $a^2 - 2ab + b^2 = ab$. Поэтому $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 5$, откуда $\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{5}$, так как по условию $a > b > 0$.

3. Вычислите $\sin 18^\circ$

Решение.

Пусть $18^\circ = \alpha$. Так как $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, то $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$. Но $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, а $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$. Тогда получаем, что $2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 (\cos \alpha)^3 - 3 \cos \alpha$ или

$$\cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha - 3) = 0$$

Так как $\cos \alpha \neq 0$, то $4 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha - 3 = 0$ или

$$4 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0$$

Решив это уравнение, получим $\sin \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ или $\sin \alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

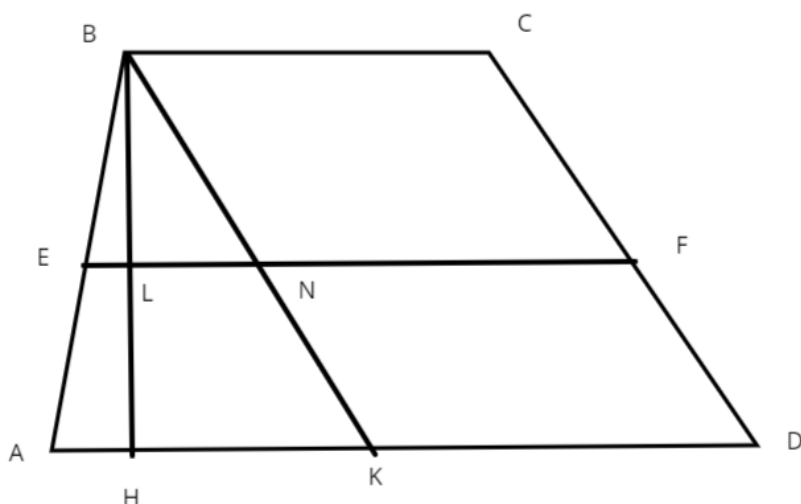
Учитывая, что угол принадлежит первой четверти, имеем $\sin \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Комментарий: В ответе указаны оба корня – 3 балла.

4. Параллельные стороны трапеции равны a и b . Определите длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

Решение.



По условию задачи $BC=a$, $AD=b$.

Обозначим искомый отрезок $EF=m$. BH – высота трапеции. Проведем прямую BK параллельно CD . Площадь трапеции $ABCD$ равна $S = \frac{a+b}{2} BH$

По условию отрезок EF параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам, тогда по формуле площади трапеции имеем

$$\frac{a+m}{2} BL = \frac{b+m}{2} LH, \quad LH = BH - BL$$

$$(a+m)BL = (b+m)(BH - BL)$$

Так как треугольники BEN и BAK подобны, то $\frac{BL}{BH} = \frac{EN}{AK}$, а $\frac{EN}{AK} = \frac{m-a}{b-a}$.

Поскольку $BC=NF=KD$. Тогда $\frac{BL}{BH} = \frac{m-a}{b-a}$, то есть $BL = \frac{m-a}{b-a} BH$, $BH - BL = BH - \frac{m-a}{b-a} BH = BH \left(\frac{b-m}{b-a} \right)$.

Следовательно,

$$(a+m) \frac{m-a}{b-a} BH = (b+m) BH \left(\frac{b-m}{b-a} \right)$$

$$(a+m) \frac{m-a}{b-a} = (b+m) \left(\frac{b-m}{b-a} \right)$$

$$(a+m)(m-a) = (b+m)(b-m)$$

$$m^2 - a^2 = b^2 - m^2$$

$$2m^2 = b^2 + a^2$$

$$m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Ответ:

$$m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

5. Число $\overline{abcd}$ - точный квадрат и такое, что число $\overline{dcba}$ и частное от деления числа $\overline{abcd}$ на число $\overline{dcba}$ являются точными квадратами. Найдите число $\overline{abcd}$.

Решение.

Числа $\overline{abcd}$ и $\overline{dcba}$ различны (число $\overline{aaaa}$ не может быть точным квадратом). Частное от деления первого из этих чисел на второе есть число однозначное и, следовательно, равно 4 или 9.

Так как число $\overline{abcd}$ – точный квадрат, то d может быть равно одному из чисел: 1, 4, 5, 6, 9. Заметим, что $d = 1$, так как уже при $d = 4$ произведение числа $\overline{4cba}$ на 4 дает пятизначное число.

Так как число $\overline{1cba}$ – точный квадрат, то число a может быть равно одному из чисел: 1, 4, 5, 6, 9. Если бы $a = 1$, то $d = 4$ или $d = 9$, чего быть не может. Если бы $a = 4$, то $d = 6$, чего быть также не может.

Аналогично, значениями a не могут быть числа 5 и 6. Тогда $a = 9$, причем частное от деления числа $\overline{9bc1}$ на число $\overline{1cb9}$ должно быть равно 9.

Приходим к уравнению:

$$9 \times 1000 + 100b + 10c + 1 = 9 \times (1000 + 100c + 10b + 9)$$

$$b - 89c = 8$$

Так как $b < 10$, $c < 10$, то $c = 0$ и $b = 8$.

Исходным числом является 9801. Так как $9801 = 99^2$, число $1089 = 33^2$. И частное от деления $9801:1089 = 9 = 3^2$.