

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
10 класс**

Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут

10.1. Решите систему уравнений относительно неизвестных x, y, z (a и b – параметры):

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

Решение: Из первого уравнения выражаем, например, z и подставляем в третье. После преобразований получим равносильное уравнение $(x + y)(a - x)(a - y) = 0$. Но из первого $x + y = a - z$, поэтому хотя бы одно из неизвестных равно a . Без ограничения общности $z = a$. Тогда $x + y = 0$ и из второго уравнения получаем, что $x^2 = b^2$. В итоге получаем решения $x = b, y = -b, z = a$ и ещё пять, получающихся из приведённого всевозможными перестановками x и y .

Ответ: $(b, -b, a), (b, a, -b), (-b, b, a), (-b, a, b), (a, b, -b), (a, -b, b)$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получены не все шесть троек ответа, а только некоторые из них, т. е. учтены не все перестановки чисел x, y и z	6 баллов
Получено уравнение-следствие вида $f(x, y, z) = 0$ и его левая часть разложена на множители	3 балла
Верный ответ без обоснования ИЛИ хотя бы одна из шести троек ответа с проверкой, что она удовлетворяет системе	1 балл
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также решения при конкретных значениях a и b	0 баллов

10.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BI и CJ внутренних углов B и C этого треугольника. Из произвольной точки M , лежащей на отрезке IJ , опущены перпендикуляры: MN на AB , MP на AC и MQ на BC . Докажите, что верно равенство $MN + MP = MQ$.

Решение: Опустим из точек I и J перпендикуляры: ID на AB , JE на AC , IG и JF на BC . По свойству биссектрисы $ID = IG = b$, $JF = JE = a$. Пусть, кроме того, $JM = p$, $MI = t$ (см. рисунок).

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

10.3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и для любого значения $x \in [-1; 1]$ имеет место неравенство

$$\left| ax + \frac{b}{2}(1 - x^2) \right| \leq \max\{a, b\}.$$

Решение: В левой части стоит выражение вида $|f(x)|$, где $f(x)$ — квадратный трёхчлен. Посмотрим на него, как на функцию от x . Наибольшее значение этой функции на любом отрезке достигается или на концах отрезка, или в точке x_0 — вершине параболы — графика квадратного трёхчлена $f(x)$. Значения трёхчлена $f(x)$ на концах отрезка $[-1; 1]$ равны $f(-1) = a = f(1)$, что не больше a , и тем более не больше максимума из чисел a и b . Абсцисса вершины параболы равна $x_0 = \frac{a}{b}$. При $a > b$ она лежит вне отрезка $[-1; 1]$; в этом случае доказывать нечего. При $0 < a \leq b$ значение в вершине равно

$$\frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$$

то есть тоже не больше максимума из чисел a и b .

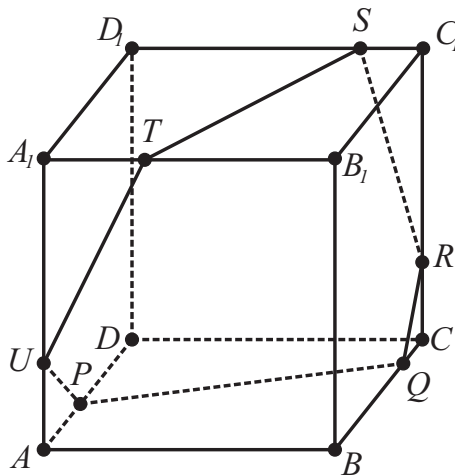
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Неравенство верно доказано в случае $a \leq b$ ИЛИ для полного решения не хватает только исследования функции на концах промежутка	5 баллов
Задача сведена к исследованию на отрезке $[-1; 1]$ квадратного трёхчлена $f(x) = ax + \frac{b}{2}(1 - x^2)$	3 балла
Доказано, что неравенство выполнено при $x = \pm 1$	1 балл
Утверждение проверено для нескольких конкретных пар (a, b)	0 баллов

10.4. На рёбрах $AD, BC, CC_1, C_1D_1, A_1B_1, AA_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрали точки P, Q, R, S, T, U соответственно так, что

$$\begin{aligned} \angle PQB = \angle RQC, \quad \angle RSC_1 = \angle TSD_1, \quad \angle TUA_1 = \angle PUA, \\ \angle QRC = \angle SRC_1, \quad \angle STB_1 = \angle UTA_1, \quad \angle UPA = \angle QPD. \end{aligned}$$

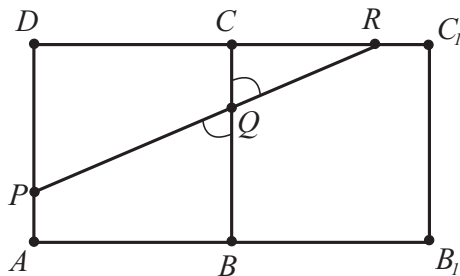
Найдите длину замкнутой ломаной $PQRSTUP$ если длина ребра куба равна 1.



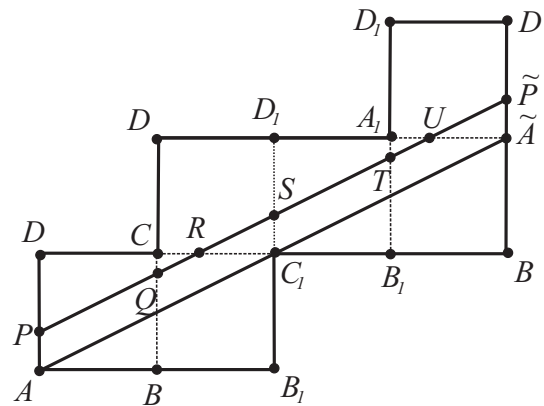
К решению задачи 10.4,
расположение точек на кубе

Решение: Мысленно повернём грань BCC_1B_1 относительно ребра BC так, чтобы вся эта грань оказалась лежащей в плоскости ABC — см. рисунок. Из равенства углов $\angle PQB = \angle RQC$ следует, что эти углы (после поворота) стали вертикальными, поэтому точки P , Q и R теперь лежат на одной прямой — см. рисунок ниже слева.

Аналогично, после нужных поворотов других граней получим, что на одной прямой окажутся тройки точек R , S и T ($\angle RSC_1 = \angle TSD_1$), T , U и P ($\angle TUA_1 = \angle PUA$) и S , Q и R ($\angle QRC = \angle SRC_1$). Этого достаточно, чтобы на развёртке куба (см. рисунок ниже справа) все шесть точек оказались на одной прямой (равенство двух других пар углов из условия — лишнее данное; оно следует из четырёх остальных).



К решению задачи 10.4, равенство углов



К решению задачи 10.4, расположение точек
на развёртке

Мы доказали, что длина ломаной $PQRSTUP$ равна длине отрезка $P\tilde{P}$ (см. рисунок выше справа). Так как четырёхугольник $P\tilde{P}\tilde{A}A$ — параллелограмм (его стороны PA и $\tilde{P}\tilde{A}$ равны и параллельны), эта длина равна длине отрезка $\tilde{A}A$. Последняя легко находится по теореме Пифагора: $\tilde{A}A = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{20}$.

Примечание 1: Из анализа решения видно, что

$$\frac{QC}{CR} = \frac{SC_1}{C_1R} = \frac{A_1T}{A_1U} = \frac{AP}{AU} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно найти углы между звеньями ломаной и рёбрами куба (они равны $\arctg 2$ и $\arctg 0,5$).

Примечание 2: Задача допускает и громоздкие технические решения: ввести неизвестные (например, $QC = x$, $CR = y$), через подобие треугольников найти остальные длины, составить уравнение и вывести соотношение между неизвестными, затем по теореме Пифагора подсчитать длины звеньев (как функцию от

введённых переменных). При дальнейшем суммировании эта переменная уничтожится и получится нужная константа.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения есть арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно найдены углы между звеньями ломаной и рёбрами куба	4 балла
Имеется идея рассмотреть развёртку поверхности куба ИЛИ условие задачи верно выражено через введённые переменные — длины отрезков и величины углов	3 балла
Отмечено подобие хотя бы одной из пар треугольников: $\Delta TA_1U \sim \Delta UAP$, $\Delta QRC \sim \Delta SRC_1$ и выписано отношение пропорциональных сторон	2 балла
Верный ответ без обоснования (возможно, проиллюстрированный на частных примерах)	1 балл
Любые рассуждения и доп. построения, не ведущие к решению задачи	0 баллов

10.5. Верно ли, что бесконечное множество квадратов со сторонами

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

можно разместить в большом квадрате со стороной 1 так, чтобы никакие маленькие квадраты между собой не пересекались?

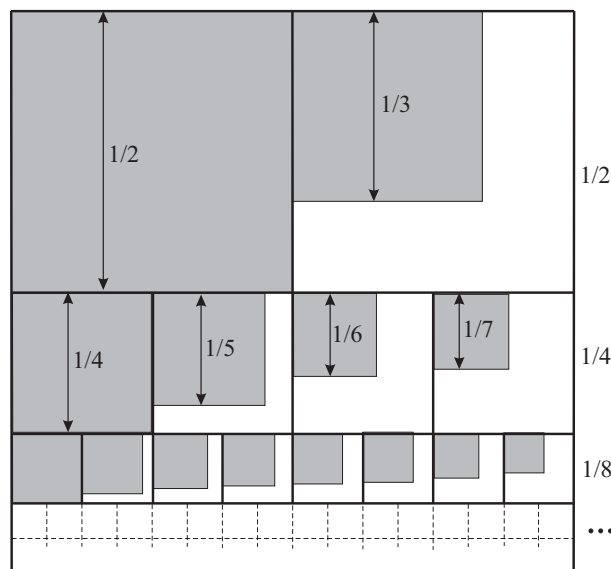
Решение: Разделим сторону квадрата со стороной 1 на отрезки длиной $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$, и. т. д. (это возможно, так как сумма бесконечной геометрической прогрессии $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ как раз 1). Через точки деления проведём прямые, параллельные другой стороне квадрата (см. рисунок).

Квадрат разделится на полосы; ширина i -й полосы равна $\frac{1}{2^i}$. Каждую из этих полос разрежем на квадраты той же ширины; из i -й полосы получится 2^i квадратов. В эти квадраты разместим (по одному в каждый) квадраты со сторонами

$$\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i + 1}, \frac{1}{2^i + 2}, \dots, \frac{1}{2^i + 2^i - 1} = \frac{1}{2^{i+1} - 1}.$$

Все квадраты уложены.

Ответ: верно.



К решению задачи 10.5

Примечание: В решении задачи по сути приведено доказательство, что ряд из квадратов чисел, обратных к натуральным, сходится $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < \infty\right)$, и его сумма не больше 2. В этом его ключевое отличие от гармонического ряда $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, сумма которого бесконечна.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верная конструкция приведена, (достаточно рисунка), но не обосновано, что она возможна	5 баллов
Ответ без обоснования ИЛИ неверные способы размещения	0 баллов

10.6. Двадцать сосисок и десять сарделек соединили в одну незамкнутую цепочку в произвольном порядке. Владелец двух собак хочет перерезать цепочку в нескольких местах соединений так, чтобы можно было без дальнейших разрезов поделить сардельки и сосиски поровну между своими питомцами (т. е. по десять сосисок и по пять сарделек каждой собаке). Какого наименьшего числа разрезов ему заведомо хватит при любом расположении сарделек и сосисок в цепочке?

Решение: Если в цепочке с одного конца идут все сосиски, а с другого — сардельки, то потребуется хотя бы два разреза, так как надо и сардельки разделить, и сосиски, а одним разрезом этого не сделать. Покажем, что двух разрезов хватит при любом расположении сосисок и сарделек в цепочке. Обозначим сосиску буквой О, сардельку буквой А. Тогда любая цепочка представляет собой слово из 20 букв О и десяти букв А. Назовём любую группу подряд идущих букв в

слове подсловом. Покажем, что в нашем слове можно найти 15-буквенное подслово, содержащее ровно 10 букв О — назовём такое подслово хорошим. (Этого достаточно для того, чтобы хватило двух разрезов: вырежем из цепочки кусок, соответствующий хорошему подслову, и отдадим его одной из собак, а второй отдадим остальное.) Рассмотрим первые пятнадцать букв слова. Если в них букв О ровно 10, хорошее подслово найдено. Пусть их меньше 10 (случай больше 10 рассматривается аналогично). Будем последовательно переходить к следующему 15-буквенному подслову, убирая одну букву слева и добавляя одну букву справа. Каждый раз будем считать количество букв О в рассматриваемом подслову. Заметим, что это количество увеличится на 1, если мы добавили букву О, а убрали букву А, уменьшится на 1, если добавили А, а убрали О, и не изменится, если мы добавили ту же букву, что и убрали. Таким образом, количество букв О меняется не более, чем на 1 (в ту или другую сторону). Последнее из рассматриваемых подслов состоит из последних 15 букв исходного слова, поэтому количество букв О в нём больше 10. Среди рассмотренных подслов найдём первое, в котором количество букв не меньше 10 (такое, очевидно, существует). Оно искомое, так как в предыдущем подслову букв О было меньше 10, а увеличится это количество может только на 1.

Ответ: два разреза.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказательство, что двух разрезов заведомо хватит, при этом не обосновано, что одного разреза в общем случае недостаточно	4 балла
Пример расположения сосисок-сарделек, при котором одного разреза не хватит, и доказательство этого факта	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Примеры расположения сосисок-сарделек, при которых достаточно одного разреза	0 баллов