

10 класс

1. Сколько существует 10-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 7?

Ответ: 9.

Решение. Пусть число содержит k цифр 7. Тогда сумма его цифр равна $7k$. По признаку делимости на 9 необходимо, чтобы $7k$ делилось на 9. Поскольку числа 7 и 9 взаимно просты, k должно делиться на 9. Учитывая, что число 10-значное и первая цифра равна 7, количество семёрок k удовлетворяет неравенству $1 \leq k \leq 10$. Единственное значение k , кратное 9 в этом диапазоне, это $k = 9$.

Поэтому в записи числа участвуют 9 семёрок и один ноль. И наоборот, каждое число из 9 семёрок и одного нуля удовлетворяет условию. Ноль может стоять в любой позиции, кроме первой, что даёт 9 вариантов.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Введена переменная k (количество цифр 7) и доказано, что $7k$ кратно 9 — 2 балла. Доказано, что количество k семёрок делится на 9 — 3 балла. Найдено значение $k = 9$ — 5 баллов. Ошибка при подсчёте — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдётся такое действительное число y , что $f(x) = f(y) + y$. Найдите наименьшее возможное значение a .

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$.

Решение. Запишем равенство $f(x) = f(y) + y$ в виде $y^2 + (a+1)y - x^2 - ax = 0$. Из условия следует, что это уравнение разрешимо относительно y при любом значении x , и значит, дискриминант $D = (a+2x)^2 + 2a + 1$ этого квадратного трёхчлена неотрицательный. В частности, при $x = -\frac{a}{2}$ имеем неравенство $2a + 1 \geq 0$, то есть $a \geq -\frac{1}{2}$ (ОЦЕНКА).

ПРИМЕР. При $a = -\frac{1}{2}$ уравнение $f(x) = f(y) + y$ при любом x имеет решение $y = -x$, так как

$$f(y) + y - f(x) = y^2 + \frac{1}{2}y - x^2 + \frac{1}{2}x = (y+x)\left(y-x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Критерии. Условие правильно преобразовано к квадратному уравнению относительно y — 1 балл. Сделан вывод о необходимости неотрицательности дискриминанта D_y , но его выражение найдено неверно — не более 2 баллов. Дискриминант D_y найден, но дальнейший анализ проведён с ошибками (например, рассматривается дискриминант относительно x без учёта того, что x — произвольный параметр) — 3 балла. Доказано неравенство $a \geq -\frac{1}{2}$, но пропущено объяснение достижимости (нет примера) — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с четвёртого, равно среднему арифметическому трёх предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равно 800?

Ответ: 4039.

Решение. Обозначим первые три числа через x , y и z . Тогда следующие числа равны:

$$a_4 = \frac{x+y+z}{3}, \quad a_5 = \frac{x+4y+4z}{9}, \quad a_6 = \frac{4x+7y+16z}{27}, \quad a_7 = \frac{16x+28y+37z}{81}.$$

По условию $a_7 = 800$, поэтому $16x + 28y + 37z = 81 \cdot 800 = 64800$. Заметим, что $16x$ и $28y$ делятся на 4, и 64800 также делится на 4. Значит, $37z$ делится на 4. Так как 37 и 4 взаимно просты, то z

делится на 4. В частности, $z \geq 4$. Поскольку $y \geq 1$, $z \geq 4$ и $16x = 64\,800 - 28y - 37z$, получаем

$$16x \leq 64\,800 - 28 \cdot 1 - 37 \cdot 4 = 64\,800 - 28 - 148 = 64\,624, \quad \text{откуда} \quad x \leq \frac{64\,624}{16} = 4\,039.$$

Покажем, что значение $x = 4\,039$ достигается. Пусть $x = 4\,039$, $y = 1$ и $z = 4$, тогда следующие четыре числа равны: $a_4 = 1\,348$, $a_5 = 451$, $a_6 = 601$, $a_7 = 800$. Все числа натуральные. Следовательно, максимальное значение первого числа равно 4 039.

Критерии. Получено уравнение $16x + 28y + 37z = 64\,800 - 1$ балл. Доказано, что z делится на 4 — 2 балла. Получена оценка $x \leq 4\,039 - 2$ балла. Приведён пример с $x = 4\,039$ и проверено, что все числа натуральные — 2 балла. Баллы суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

Ответ: 12 троек.

Решение. Рассмотрим граф из 9 вершин, соответствующих гостям вечеринки. Две вершины графа соединим красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы друг с другом, и синим отрезком, если не знакомы. Докажем, что общее число красных и синих треугольников не менее 12.

Обозначим через E , F и G — количество красных, синих и *неполных* треугольников, содержащих рёбра обоих цветов (такие тройки не являются ни дружескими, ни незнакомыми). Тогда общее число треугольников в графе равно

$$E + F + G = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84. \quad (2)$$

Пронумеруем всех гостей от 1 до 9, и пусть d_i — количество знакомых i -го человека, тогда количество незнакомых с ним будет $8 - d_i$. Для каждого гостя i выберем одного знакомого с ним человека j — это можно сделать d_i способами, а также одного незнакомого с ним человека k — это можно сделать $(8 - d_i)$ способами. Полученная тройка ijk образует *неполный* треугольник. Таким образом, для каждого гостя получается $d_i(8 - d_i)$ неполных треугольников. Заметим, что каждый неполный треугольник при таком способе подсчёта учитывается дважды — для каждой из двух вершин треугольника ijk , из которых исходят разноцветные рёбра. (Если отрезок jk синий, то треугольник ijk учитывается также при подсчёте неполных треугольников, связанных с j -м человеком. Если же отрезок jk красный, то треугольник ijk учитывается при подсчёте неполных треугольников, связанных с k -м человеком.) Следовательно,

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 d_i(8 - d_i).$$

Поскольку $x(8 - x) = 16 - (x - 4)^2$, каждое слагаемое в этой сумме не больше 16, и значит, $G \leq \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16$, то есть $G \leq 72$. Отсюда и из равенства (2) следует, что $E + F = 84 - G \geq 12$.

Приведём ПРИМЕР, подтверждающий точность этой оценки.

На рисунке 4 изображён граф в виде 9-угольника, у которого из каждой вершины выходит по 4 красных (они указаны на рисунке) и по 4 синих (их на рисунке нет) ребра. Такой граф называется *4-регулярным*. У него ровно 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих — 135, 357, 579, 792, 924, 246, 468, 681, 813.

На рисунке 5 этот же граф реализован по-другому. Из каждой вершины графа выходят 4 синих рёбра — в каждые две вершины, соседние справа и слева от неё. В этом графе также 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих — 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 891, 912.

Замечание. Эта задача является продолжением (и обобщением) известной задачи, в которой требуется доказать, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое, попарно знакомых между собой, или трое, попарно не знакомых.

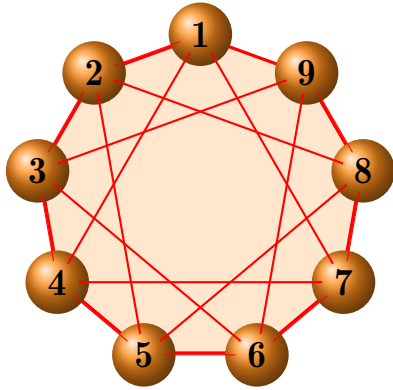


Рис. 4

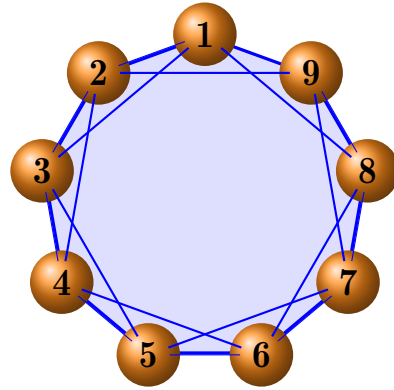


Рис. 5

Критерии. Записано соотношение $E + F + G = C_9^3 = 84 - 1$ балл. Доказано, что число неполных треугольников графа знакомств равно $\frac{1}{2} \sum d_i(8 - d_i) - 2$ балла. Доказано, что число неполных треугольников $d_i(8 - d_i) \leq 16$ для каждой вершины — 3 балла. Доказано, что число дружеских и незнакомых троек не меньше 12 — 4 балла (оценка). Приведён пример 4-регулярного графа без подсчёта числа троек — 5 баллов. Приведён пример с подсчётом, но не все тройки явно указаны — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q , причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Решение. Пусть описанные окружности треугольников QPB и QPC пересекают лучи AB и AC в точках D и E соответственно (рис. 6). Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем:

$$AB \cdot AD = AP \cdot AQ \quad \text{и} \quad AC \cdot AE = AP \cdot AQ.$$

Отсюда $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Отрезки AB и AC равны как отрезки касательных к ω , поэтому $AD = AE$ и, значит, треугольник ADE равнобедренный.

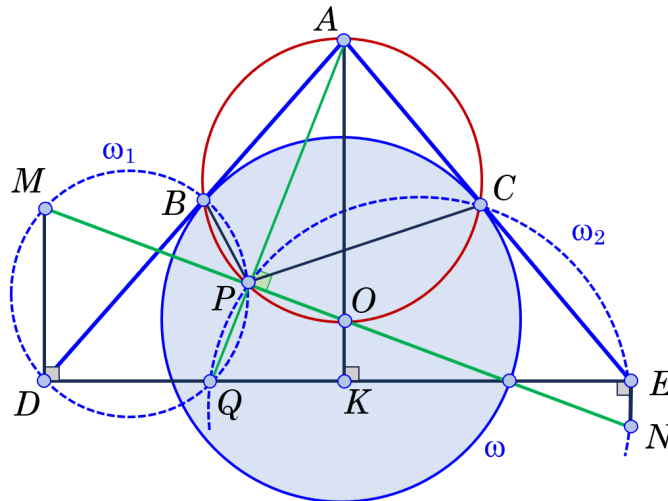


Рис. 6

Пусть K — середина DE . Тогда прямая AK является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника ADE , в частности, AK проходит через O . Поскольку B и C — точки касания

окружности с центром O , имеем $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^\circ$, то есть точки A, B, C, P, O лежат на окружности с диаметром AO .

Из вписанных четырёхугольников $ABPC, BPQD, CPQE$ имеем:

$$\angle PQD = 180^\circ - \angle PBD = \angle ABP = 180^\circ - \angle ACP = \angle PCE = 180^\circ - \angle PQE,$$

поэтому точка Q лежит на отрезке DE .

Так как четырёхугольник $PQDM$ вписанный, то $\angle MDQ = \angle MPQ = 90^\circ$, откуда $MD \perp DE$. Аналогично, $NE \perp DE$. Таким образом, $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$. Отсюда $OM = ON$.

Критерии. Доказано, что $AD = AE$ — 2 балла. Установлено, что прямая AO содержит биссектрису, медиану и высоту треугольника ADE — 3 балла. Дополнительно доказано, что точки A, B, C, P, O лежат на одной окружности (с использованием прямых углов) — 4 балла. Доказано, что точка Q лежит на отрезке DE — 5 баллов. Доказано, что $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$ — 6 баллов.