

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
10 класс

КЛЮЧИ

Время выполнения заданий – 235 мин.

Максимальное количество первичных баллов – 35, итоговых – 100.

1. На Острове рыцарей и лжецов есть Город рыцарей, в котором живут только рыцари, всегда говорящие правду, и Город лжецов, населённый лжецами, которые всегда лгут (жители острова живут только в этих городах), при этом все друг друга знают. Однажды путешественник встретил на дороге компанию из пяти жителей острова, которых звали Андрей, Боря, Витя, Гоша и Дима. Каждый из них сказал одну фразу.

Андрей: «Если бы вы спросили Витю про Борю, то он сказал бы, что Боря – рыцарь».

Боря: «Мы с Димой из одного города».

Витя: «Гоша и Боря из одного города».

Гоша: «Мы с Витей из разных городов».

Дима: «Среди моих спутников рыцарей и лжецов поровну».

Определите, кто из этой компании рыцарь, а кто лжец. Объясните, как вы рассуждали и почему нет других вариантов.

Ответ: Андрей, Гоша и Дима – рыцари, Боря и Витя – лжецы.

Решение. Заметим, что из фразы Бори следует, что **Дима – рыцарь**. Действительно, если Боря рыцарь, то он сказал правду, и, значит, Дима из одного с ним города, то есть рыцарь. Если Боря лжец, то он солгал и Дима не из города Бори, то есть он из города рыцарей.

Из фразы Гоши следует, что **Витя – лжец**. Действительно, если Гоша рыцарь, то он сказал правду, и, значит, Дима не из города рыцарей, то есть лжец. Если Гоша лжец, то он солгал и Дима из одного города с Гошей, то есть он из города лжецов.

Так как Дима – рыцарь, то его фраза истинна, то есть среди остальных людей этой компании два рыцаря. Так как Витя – лжец, то его фраза ложна, то есть Гоша и Боря из разных городов. Значит, один из них рыцарь, другой лжец; так как рыцарей среди первых четырёх должно быть двое, то **вторым рыцарем является Андрей**.

Так как Витя – лжец, то из фразы Андрея следует, что **Боря – тоже лжец**, так как Витя солжёт про Борю, сказав, что он рыцарь. Оставшийся человек, **Гоша, является рыцарем**, так как мы уже знаем, что Гоша и Боря из разных городов.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Пропущены важные случаи – от 2 до 5 баллов.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
10 класс

2. Для трёх действительных чисел a , b и c известно, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 21 \text{ и } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{45}.$$

Какие значения может принимать выражение $a + b + c$? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 2025.

Решение. Заметим, что $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3 + 21 + 21 = 45$, то есть $\frac{1}{45}(a + b + c) = 45$. Следовательно, $a + b + c = 45 \cdot 45 = 2025$.

Замечание. Такой набор чисел существует, например, $a = 945 + 270\sqrt{11}$, $b = c = 540 - 135\sqrt{11}$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (предъявлять пример не обязательно) – 7 баллов.

Получен верный ответ для какого-то набора конкретных чисел, удовлетворяющих условию задачи, например, когда $a = 945 + 270\sqrt{11}$, $b = c = 540 - 135\sqrt{11}$, – 0 баллов.

3. На доске написано число 2025. Андрей выполняет с написанным на доске числом одно из трёх действий: увеличивает его на 25%, или увеличивает его на 60%, или уменьшает его на 60% (получившееся число уже не обязано быть натуральным). После этого результат действия записывается на доску, а предыдущее число стирается. С новым числом также выполняется одно из трёх действий и т. д. Могло ли в результате 2025-го действия снова получиться 2025?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Обозначим исходное число через A . Если на доске в какой-то момент находится число a и оно увеличивается на 25%, то получится число $\left(1 + \frac{25}{100}\right)a = \frac{5}{4}a$; если оно увеличивается на 60%, то получится число $\left(1 + \frac{60}{100}\right)a = \frac{8}{5}a$; если оно уменьшается на 60%, то получится число $\left(1 - \frac{60}{100}\right)a = \frac{2}{5}a$. Если было выполнено x действий первого вида, y действий второго вида и z действий третьего вида, то в результате получим число

$$B = A \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^y \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^z = \frac{5^x \cdot 2^{3y} \cdot 2^z}{2^{2x} \cdot 5^y \cdot 5^z} \cdot A = 2^{3y+z-2x} \cdot 5^{x-y-z} \cdot A$$

Если получилось то же самое число, которое было вначале, то $2^{3y+z-2x} \cdot 5^{x-y-z} \cdot A = A$, откуда следует, что $2^{3y+z-2x} \cdot 5^{x-y-z} = 1$, то есть $3y + z - 2x = 0$ и $x - y - z = 0$. Тогда $x = y + z$, $3y + z - 2(y + z) = 0$, следовательно, $y = z$ и $x = y + z = 2z$. Тогда общее количество действий равно $x + y + z = 2z + z + z = 4z$, то есть кратно 4. Но 2025 не кратно 4, следовательно, это невозможно.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
10 класс**

Приведена только последовательность ходов, где на каждый ход третьего вида приходится один ход второго вида и два хода первого, и в результате не получается число 2025 – 1 балл.

4. Даны пять последовательных (идущих одно за другим) натуральных чисел, первое из которых делится нацело на 13, второе – на 4, третье – на 5, четвёртое – на 7, пятое – на 11. Какую наименьшую сумму могут давать эти числа?

Ответ: 2025.

Решение. Обозначим эти 5 чисел через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Рассмотрим a_1 и a_4 . Из условия имеем $a_1 = 13a$, $a_4 = 7b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) и $a_4 = a_1 + 3$. Тогда $13a + 3 = 7b$, то есть $14a - (a - 3) = 7b$, следовательно, $a - 3 : 7$. Таким образом, $a = 7k + 3$ и $a_1 = 91k + 39$ для некоторого целого неотрицательного k . Из условия также имеем равенства $a_3 = 5c$ и $a_3 = a_1 + 2$, следовательно, $13(7k + 3) + 2 = 5c$, что равносильно $91k + 41 = 5c$, то есть $90k + 40 + (k + 1) = 5c$. Отсюда следует, что $k + 1 : 5$, а значит, $k = 5n - 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $a_1 = 91(5n - 1) + 39 = 455n - 52$. Наименьшее значение a_1 (а значит, и вся сумма) принимает при $n = 1$, в этом случае $a_1 = 403$, $a_2 = 404$, $a_3 = 405$, $a_4 = 406$, $a_5 = 407$, при этом $a_2 : 4$ и $a_5 : 11$, то есть все условия выполнены. Сумма всех пяти чисел равна $403 + 404 + 405 + 406 + 407 = 405 \cdot 5 = 2025$.

Замечание. Можно было вывести формулу для a_1 с учётом всех пяти условий делимости, тогда получили бы $a_1 = 20020k - 19617$.

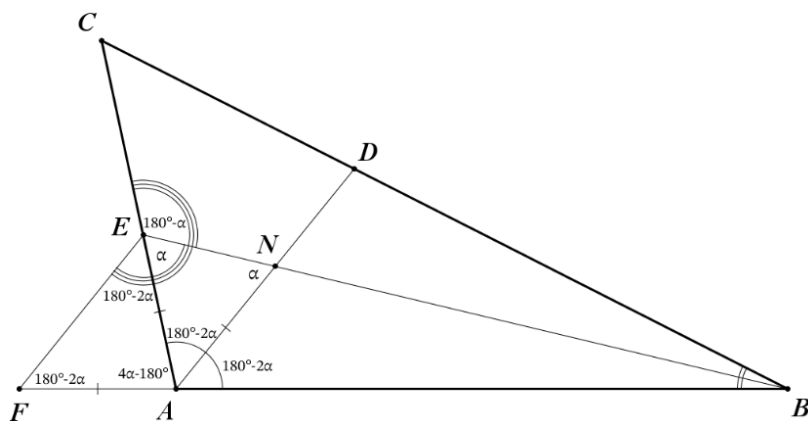
Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом все формулы найдены верно – 4-6 баллов.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE , пересекающиеся в точке N . Известно, что $AN = AE$. Докажите, что $AB + AE = BC$.

Решение. На продолжении отрезка AB за точку A выберем точку F такую, что $AF = AE$. Пусть $\angle AEN = \alpha$. Так как $AE = AN$, то треугольник AEN равнобедренный, следовательно, $\angle ANE = \angle AEN = \alpha$, $\angle EAN = 180^\circ - 2\alpha$. AD – биссектриса, поэтому $\angle BAN = \angle EAN = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle EAF = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 2\angle EAN = 180^\circ - 2(180^\circ - 2\alpha) = 4\alpha - 180^\circ$.



Треугольник EAF – равнобедренный, следовательно, $\angle AEF = \angle AFE = \frac{180^\circ - \angle EAF}{2} = \frac{180^\circ - (4\alpha - 180^\circ)}{2} = 180^\circ - 2\alpha$. $\angle BEF = \angle AEN + \angle AEF = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$, $\angle BEC = 180^\circ - \angle BEA = 180^\circ - \alpha$. Рассмотрим треугольники BEF и BEC , они равны по стороне и двум прилежащим к ней углам (BE –

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году**

10 класс

общая, $\angle BEF = \angle BEC = 180^\circ - \alpha$, $\angle EBF = \angle EBC$, так как BE – биссектриса). Из равенства треугольников имеем $BF = BC$, но $BF = AB + AF = AB + AE$, следовательно, $AB + AE = BC$.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

В решении присутствует дополнительное построение, описанное в авторском решении, но решение не доведено до конца – 2 балла.
