

Условия и решения задач

10.1 Решите уравнение

$$\frac{7}{x+7} + \frac{7 \cdot 6}{(x+7)(x+6)} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{(x+7)(x+6)(x+5)} + \dots + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(x+7)(x+6)(x+5) \dots (x+1)} = 8.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Решение. Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{7}{x+7} \left(1 + \frac{6}{x+6} \left(1 + \frac{5}{x+5} \left(1 + \frac{4}{x+4} \left(1 + \frac{3}{x+3} \left(1 + \frac{2}{x+2} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) = 8.$$

Последовательно преобразовывая выражения в скобках, получим:

$$\frac{7}{x+7} \left(1 + \frac{6}{x+6} \left(1 + \frac{5}{x+5} \left(1 + \frac{4}{x+4} \left(1 + \frac{3}{x+3} \left(1 + \frac{2}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+1} \right) \right) \right) \right) \right) = 8$$

$$\frac{7}{x+7} \left(1 + \frac{6}{x+6} \left(1 + \frac{5}{x+5} \left(1 + \frac{4}{x+4} \left(1 + \frac{3}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+1} \right) \right) \right) \right) = 8$$

$$\frac{7}{x+7} \left(1 + \frac{6}{x+6} \left(1 + \frac{5}{x+5} \left(1 + \frac{4}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+1} \right) \right) \right) = 8$$

$$\frac{7}{x+7} \left(1 + \frac{6}{x+6} \left(1 + \frac{5}{x+5} \cdot \frac{x+5}{x+1} \right) \right) = 8$$

$$\frac{7}{x+7} \left(1 + \frac{6}{x+6} \cdot \frac{x+6}{x+1} \right) = 8$$

$$\frac{7}{x+7} \cdot \frac{x+7}{x+1} = 8$$

Откуда $x = \frac{1}{8}$

□

10.2 Из пункта A в пункт B одновременно отправились два туриста. Первый шел весь путь с постоянной скоростью, а второй разделил свой путь на 7 участков, увеличивая скорость на каждом последующем участке на одну и ту же величину, причем его скорость на 4 участке была равна скорости первого туриста. Кто пришел в пункт B раньше?

Ответ: первый турист.

Решение. Обозначим через S длину $1/7$ пути из пункта A в пункт B , через v – скорость первого туриста, а через a – скорость, на которую второй турист увеличивает свою скорость на каждом последующем участке пути. Первый турист затратил на весь путь $\frac{7S}{v}$.

Скорости второго туриста на первом, втором, ..., седьмом участке пути равны соответственно

$$v - 3a, v - 2a, v - a, v, v + a, v + 2a, v + 3a,$$

следовательно, второй турист затратит на весь путь

$$\frac{S}{v-3a} + \frac{S}{v-2a} + \frac{S}{v-a} + \frac{S}{v} + \frac{S}{v+a} + \frac{S}{v+2a} + \frac{S}{v+3a}.$$

Заметим, что

$$\frac{S}{v-3a} + \frac{S}{v+3a} = \frac{2Sv}{v^2 - 9a^2} > \frac{2Sv}{v^2} = \frac{2S}{v}.$$

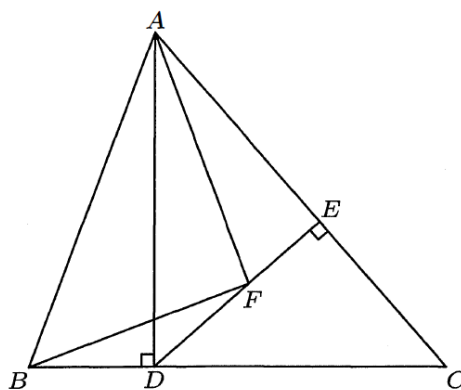
Аналогично $\frac{S}{v-2a} + \frac{S}{v+2a} > \frac{2S}{v}$ и $\frac{S}{v-a} + \frac{S}{v+a} > \frac{2S}{v}$. Следовательно, время прохождения вторым туристом всего пути больше, чем $\frac{7S}{v}$, т. е. больше, чем первым. □

10.3 Про некоторую компанию людей известно, что любые два человека, у которых одинаковое количество друзей в этой компании, не имеют общих друзей. Докажите, что в этой компании найдётся человек, у которого ровно один друг. (Предполагается, что по крайней мере одна пара друзей в этой компании имеется).

Решение. Рассмотрим человека M с наибольшим числом друзей, пусть их у него n . Каждый из них имеет не более n друзей. С другой стороны все они имеют общего друга M , поэтому число друзей у всех них различно. Таким образом, среди них будет по одному человеку с $1, 2, \dots, n$ друзьями. $\square$

10.4 В остроугольном треугольнике ABC точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC , а E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону AC . Точка F выбрана на отрезке DE так, что $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. Докажите, что $AF \perp BF$.

Решение.



Так как нужно доказать, что $\angle AFB = 90^\circ$, достаточно показать, что точки A, B, D, F лежат на одной окружности.

Треугольники ADE и DCE подобны, поэтому $\frac{AD}{AE} = \frac{DC}{DE}$. Из условия $EF \cdot DC = BD \cdot DE$ получаем $\frac{BD}{EF} = \frac{DC}{DE}$. Следовательно, $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EF}$. Это означает подобие треугольников ABD и AFE , откуда $\angle ABD = \angle AFE$, и $\angle ABD + \angle AFD = 180^\circ$. Таким образом, точки A, B, D, F лежат на одной окружности, и поэтому $\angle AFB = \angle ADB = 90^\circ$. $\square$

10.5 Ученики школы получили на контрольной по математике тройки, четверки и пятерки. Девочек в школе в 2 раза меньше мальчиков. Средняя оценка за контрольную среди девочек на 1 балл выше, чем средняя оценка всех учеников школы. Известно, что и среди девочек, и среди мальчиков встречаются все три типа оценок. Найдите наименьшее возможное количество учеников в этой школе.

Ответ: 27.

Решение. Пусть в школе x девочек и $2x$ мальчиков, а сумма всех оценок у девочек и у мальчиков равны соответственно A и B . Тогда по условию

$$\frac{A}{x} = \frac{A+B}{3x} + 1,$$

откуда $2A = B + 3x$. Следовательно,

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{2x} + 1,5,$$

то есть средняя оценка девочек на 1,5 балла выше средней оценки мальчиков.

Поскольку и среди девочек, и среди мальчиков встречаются все три типа оценок, справедливы неравенства:

$$A \leq 3 + 4 + 5(x - 2) = 5x - 3, \quad B \geq 3(2x - 2) + 4 + 5 = 6x + 3.$$

Получим:

$$\frac{A}{x} \leq 5 - \frac{3}{x}, \quad \frac{B}{2x} \geq 3 + \frac{3}{2x}.$$

Откуда

$$5 - \frac{3}{x} \geq \frac{A}{x} = \frac{B}{2x} + 1,5 \geq 4,5 + \frac{3}{2x},$$

и $x \geq 9$. Следовательно, учеников в школе не меньше $3 \cdot 9 = 27$.

Пример: оценки девочек — 3, 4, 5, 5, ..., 5 (7 пятёрок), оценки мальчиков — 3, 3, ..., 3 (16 троек), 4, 5. $\square$

Комментарий. Доказательство оценки — 4 балла, пример — 3 балла.