

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

10 класс

1. Доказать, что на множестве действительных чисел уравнение $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$ не имеет корней.
(Указание: выполнить подстановку $x = \frac{1}{z}$)

Решение:

1 СПОСОБ

Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$, определенную на множестве действительных чисел.

Исследуем функцию на экстремумы.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2.$$

Критические точки $x = 0$; $x = 3$.

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 3) \setminus \{0\}, f'(x) > 0 \text{ при } x \in (3; +\infty).$$

Поэтому $x = 3$ – точка минимума функции. Значение функции в данной точке

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 1 = -28 < 0.$$

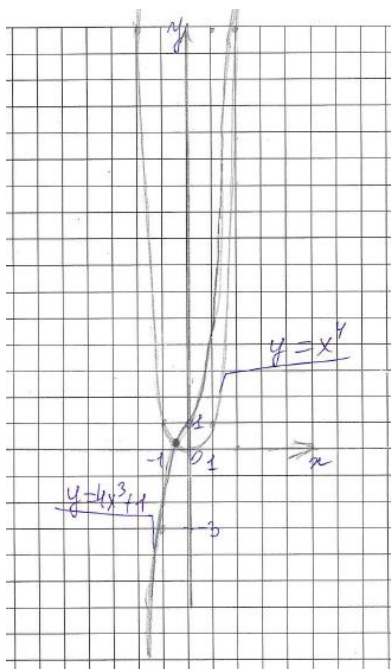
Значит, функция пересекает ось Ox в двух точках. Поэтому уравнение имеет 2 корня.

2 СПОСОБ

$$x^4 = 4x^3 + 1$$

Рассмотрим две функции $f(x) = x^4$ и $g(x) = 4x^3 + 1$.

Построим графики данных функций в одной системе координат.



По рисунку видно, что графики функций пересекаются хотя бы в одной точке. Значит, данное уравнение имеет минимум 1 корень.

3 СПОСОБ

Подстановка $x = \frac{1}{z}$.

$$z^{-4} - 4z^{-3} - 1 = 0$$

Рассмотрим функцию $f(z) = z^{-4} - 4z^{-3} - 1$, определенную на множестве действительных чисел, кроме 0.

Исследуем функцию на экстремумы.

$$f'(z) = -4z^{-5} + 12z^{-4}.$$

Критические точки $z = 0$; $z = \frac{1}{3}$.

$$f'(z) < 0 \text{ при } z \in (-\infty; \frac{1}{3}) \setminus \{0\}, f'(z) > 0 \text{ при } z \in (\frac{1}{3}; +\infty).$$

Поэтому $z = \frac{1}{3}$ – точка минимума функции. Значение функции в данной точке

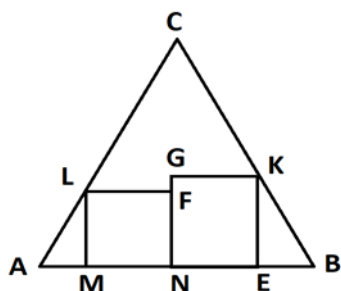
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - 1 = -28 < 0.$$

Значит, функция пересекает ось Ox в двух точках. Поэтому уравнение имеет 2 корня.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (имеются погрешности в применении символики и терминологии).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Приведено доказательство, обоснованное некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательство не содержит.
2	Приведены идеи для доказательства или не доведены до конца.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

2. Равносторонний треугольник ABC содержит квадраты $MNFL$ и $NEKG$ причем M, N, E принадлежат AB , K принадлежит BC , L принадлежит AC . При какой зависимости между длинами сторон квадратов сумма их площадей будет наименьшей?



Решение.

Обозначим длины сторон квадратов $MNFL$ и $NEKG$ как x и y соответственно. Сторона квадрата $MNFL$ равна x (т.е. $MN = NF = FL = LM = x$). Сторона квадрата $NEKG$ равна y (т.е. $NE = EK = KG = GN = y$). Наша цель — найти зависимость между x и y , при которой сумма их площадей, $S = x^2 + y^2$, будет наименьшей.

Чтобы найти связь между x и y , воспользуемся тем, что треугольник ABC равносторонний, и вершины квадратов L и K лежат на его сторонах. Все углы равностороннего треугольника равны 60° . Пусть сторона треугольника ABC равна a . Разместим треугольник так, чтобы основание AB лежало на оси X .

Рассмотрим левую часть конструкции.

Вершина L первого квадрата лежит на стороне AC .

Рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный левее квадрата $MNFL$. Пусть точка M отстоит от вершины A на расстояние AM . Тогда в этом маленьком треугольнике (назовем его AML , если бы LM была наклонной, но здесь LM перпендикулярна AB) катет, противолежащий углу 60° (угол CAB), равен высоте квадрата $LM = x$. Прилежащий катет равен AM .

Из определения тангенса: $tg60^\circ = LM / AM = x / AM$. $\sqrt{3} = x / AM$, откуда $AM = x / \sqrt{3}$.

Рассмотрим правую часть конструкции.

Вершина K второго квадрата лежит на стороне BC .

Аналогично, рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный правее квадрата $NEKG$. Пусть точка E отстоит от вершины B на расстояние EB . Угол CBA также равен 60° .

В этом треугольнике катет, противолежащий углу 60° , равен высоте квадрата $EK = y$. Прилежащий катет равен EB .

Из определения тангенса: $tg60^\circ = EK / EB = y / EB$.

Получаем: $\sqrt{3} = y / EB$, откуда $EB = y / \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} AB &= AM + MN + NE + EB \\ a &= (x/\sqrt{3}) + x + y + (y/\sqrt{3}) \\ a &= (x + y) * (1 + 1/\sqrt{3}) \\ x + y &= a / (1 + 1/\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Важно заметить, что для данной задачи конкретное значение стороны треугольника a не имеет значения. Мы видим, что сумма длин сторон квадратов $x + y$ является постоянной величиной, зависящей только от размера треугольника. Обозначим эту константу как C .

$$x + y = C, \text{ где } C \text{ — константа.}$$

Теперь наша задача свелась к следующему:

Найти минимум функции $S(x, y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = C$ (и $x > 0, y > 0$).

$$\begin{aligned} y &= C - x. \\ S(x) &= x^2 + (C - x)^2 \\ S(x) &= x^2 + (C^2 - 2Cx + x^2) = 2x^2 - 2Cx + C^2 \end{aligned}$$

Мы получили квадратичную функцию от x . График этой функции — парабола, ветви которой направлены вверх, а значит, она имеет точку минимума. Минимум достигается в вершине параболы.

Координата вершины параболы $f(t) = at^2 + bt + c$ находится по формуле $t = -b / (2a)$.

В нашем случае: $a = 2, b = -2C$.

$$x = -(-2C) / (2 * 2) = 2C / 4 = C / 2$$

Итак, сумма площадей будет минимальной, когда $x = C / 2$.

Найдем соответствующее значение y : $y = C - x = C - (C / 2) = C / 2$.

Таким образом, минимум достигается, когда $x = y$.

Сумма площадей квадратов будет наименьшей при условии, что длины их сторон равны, то есть квадраты должны быть одинакового размера ($x = y$).

Ответ: Сумма площадей квадратов будет наименьшей при условии, что длины их сторон равны.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности или ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна непринципиальная вычислительная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или имеются погрешности в применении символики и терминологии.
4-5	Верно составлена математическая модель, но участник не смог продвинуться дальше к решению ИЛИ Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
2-3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца, общая математическая модель не построена
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении или приведен ответ без решения.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

3. Приведите пример числа x , для которого выполняется равенство
 $\sin 2026x - \operatorname{ctg} 2025x = \cos 2024x - 2\operatorname{tg} 2025x$.

Ответ обоснуйте.

В условии задачи разработчиками была допущена ошибка: перепутана тригонометрическая функция, равенство должно иметь вид:

$$\cos 2026x - \operatorname{ctg} 2025x = \cos 2024x - 2\operatorname{tg} 2025x.$$

Поэтому критерии оценивания изменились.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Проведены верные преобразования выражений с использованием тригонометрических формул;
2	В преобразованиях выражений допущены незначительные ошибки.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.

Согласно предложенному условию задачи один из вариантов преобразований тригонометрических выражений.

Заметим, что $2026x = 2025x + x$
 $2024x = 2025x - x$

Пусть $2025x = a$, тогда

$$\sin 2026x = \sin(2025x + x) = \sin(a + x)$$

$$\cos 2024x = \cos(2025x - x) = \cos(a - x)$$

$$\sin(a + x) - \operatorname{tg} a = \cos(a - x) - 2 \operatorname{tg} a$$

$$\sin a \cos x + \sin x \cos a + 2 \frac{\sin a}{\cos a} = \cos a \cos x + \sin a \sin x +$$

$$\sin a (\cos x - \sin x) + \cos a (\sin x - \cos x) = \frac{\cos a}{\sin a} - 2 \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$(\sin a - \cos a)(\cos x - \sin x) = \frac{\cos^2 a - 2 \sin^2 a}{\sin a \cos a}$$

Так как достаточно привести числитель
 числа x , предположим

$$\sin a - \cos a = 0 \quad \text{и} \quad \cos^2 a - 2 \sin^2 a = 0$$

противоречие

4. В тридевятиом царстве математический конкурс проходит по странным правилам. На решение задач там отводится 130 минут. Василиса Премудрая за 5 минут решает любую 6-ти балльную задачу, за 7 минут – 8-ми балльную задачу, за 14 минут – 19-ти балльную задачу, Какое наибольшее количество баллов она может набрать, если всего 30 задач, по 10 штук каждого вида?

Решение.

При наибольшем количестве баллов не может быть больше 2-х 6-ти балльных задач (иначе выгоднее 3 таких задачи заменить на одну 19-ти балльную, и при этом сэкономить минуту, набрав больше баллов). Так же не может быть больше одной 8-ми балльной задачи (две такие заменяются на одну 19-ти балльную). Тем самым для перебора остаются следующие случаи, где в скобках указано сначала число 6-ти балльных задач, а затем число 8-ми балльных задач:

- 1) (0 - 0). Получаем максимум $19 \cdot 9 = 171$ балл за 126 минут
- 2) (0 - 1). Получаем максимум $19 \cdot 8 + 8 \cdot 1 = 160$ баллов за 119 минут.
- 3) (1 - 0). Получаем максимум $19 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 158$ баллов за 117 минут.
- 4) (1 - 1). Получаем максимум $19 \cdot 8 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 166$ баллов за 124 минуты.
- 5) (2 - 0). Получаем максимум $19 \cdot 8 + 6 \cdot 2 = 164$ балла за 122 минуты.
- 6) (2 - 1). Получаем максимум $19 \cdot 8 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 172$ балла за 129 минут.

Проверка возможности больше 172.

Максимальный балл за задачу — 19. Если $x=9$, балл 171, улучшить можно, только если уменьшить x и добавить более чем 1 балл за освободившееся время.

У нас при $x=8$ освободилось 14 минут, мы взяли 1×8 (7 мин) + 2×6 (10 мин) = 17 минут почти, балл $+8+12=20$ вместо одной 19-балльной (потеряли 19, получили 20) → +1 балл.

При $x=7$ освобождается 28 минут, но тогда теряем $2 \times 19=38$ баллов, а на 28 минут максимум можно набрать:

$4 \times$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности. Верное решение с небольшим недочетом в обосновании.
5	Ход решения верный, оно доведено до конца. Применен верный алгоритм, основанный на эффективности. Получен правильный ответ. Обоснование оптимальности отсутствует.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. Верно определена эффективность задач и выбрана правильная стратегия. В ходе реализации стратегии допущена арифметическая ошибка, которая привела к неверному ответу.
3	Верно определена ключевая идея, но алгоритм не доведен до конца.. Правильно рассчитана эффективность всех трех типов задач и верно их ранжировал. Однако дальнейшие шаги по максимизации баллов не выполнены или выполнены с грубыми ошибками.
2	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца. Рассмотрена идея сравнения задач между собой. Эффективность посчитана верно хотя бы для двух типов задач. Дальнейшего продвижения нет.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении или приведен ответ без решения.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

5. Найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными, коэффициенты которой образуют арифметическую прогрессию (например, у системы из двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ 15x + 18y = 21 \end{cases}$ коэффициенты 6, 9, 12, 15, 18, 21 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 3$). Показать, что система из двух уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение.

Решение:

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными, коэффициенты которой образуют арифметическую прогрессию:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_1, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, b_2, \dots, a_{nn}, b_n$ – арифметическая прогрессия.

Значит, $a_{11} = a, a_{12} = a + d, \dots, a_{1n} = a + (n - 1)d, b_1 = a + nd$

$a_{21} = a + (n + 1)d, a_{22} = a + ((n + 1) + 1)d, \dots, a_{2n} = a + ((n + 1) - 1)d, b_2 = a + 2nd$

$a_{31} = a + (2n + 1)d, a_{32} = a + ((2n + 1) + 1)d, \dots, a_{3n} = a + ((2n + 1) - 1)d, b_3 = a + 3nd$

Таким образом, можно заметить, что коэффициенты при неизвестных первого и третьего уравнений, т.е. стоящие на нечетных местах, пропорциональны (линейно зависимы).

Аналогичная ситуация будет и с уравнениями, стоящими на четных местах системы.

Комментарий. Данную зависимость можно заметить и приведя конкретный пример.

Важно отметить, что зависимость системы наблюдается только в случае $n \geq 3$.

Значит, если $n \geq 3$, то уравнения нашей системы зависимы и, следовательно, ее решение не единственно. Значит, $n < 3$.

Но поскольку мы говорим о системе, где $n > 1$, то $n = 2$.

Так как коэффициенты образуют арифметическую прогрессию, то искомая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} ax + (a + d)y = a + 2d \\ (a + 3d)x + (a + 4d)y = a + 5d \end{cases}$$

Решить данную систему можно любым удобным способом (подстановкой, сложением и др.)

Решим по формулам Крамера

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a & a + d \\ a + 3d & a + 4d \end{vmatrix} = -3d^2 \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} a + 2d & a + d \\ a + 5d & a + 4d \end{vmatrix} = 3d^2 \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a & a + 2d \\ a + 3d & a + 5d \end{vmatrix} = -6d^2 \\ x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2 \end{aligned}$$

Комментарий. Система двух любых уравнений, принадлежащих семейству
 $(a + 3kd)x + (a + (3k + 1)d)y = a + (3k + 2)d$
 имеет то же самое решение.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (например, не указано явно, что рассматривается система уравнений при $n \geq 3$).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца на своём конкретном примере при $n \geq 3$.
4	Показано, что решение системы из двух уравнений с двумя неизвестными единственно (даже, если ответ неверный), но не обоснованы другие случаи.
3	Дан ответ (даже, если он неверный), но ясного обоснования решение не содержит.
2	Приведены идеи для решения, но не доведены до конца.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.