

Решения задач, 10 класс

10.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + xy + y^2$, если

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

Ответ. $\frac{1}{2} \leq x^2 + xy + y^2 \leq 3$.

Решение. Из неравенства о средних имеем

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Тогда можно записать

$$x^2 + xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \leq 3.$$

Оценим требуемое выражение снизу. Воспользуемся неравенством

$$x^2 + y^2 + 2xy \geq 0,$$

из которого следует

$$xy \geq -\frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Откуда получаем

$$\frac{1}{2} \leq x^2 + xy + y^2.$$

Таким образом, окончательно выводим

$$\frac{1}{2} \leq x^2 + xy + y^2 \leq 3.$$

□

10.2. Известно, что числа

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{a+c}, \quad \frac{1}{b+c}$$

образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа a^2 , b^2 и c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

Решение. По условию

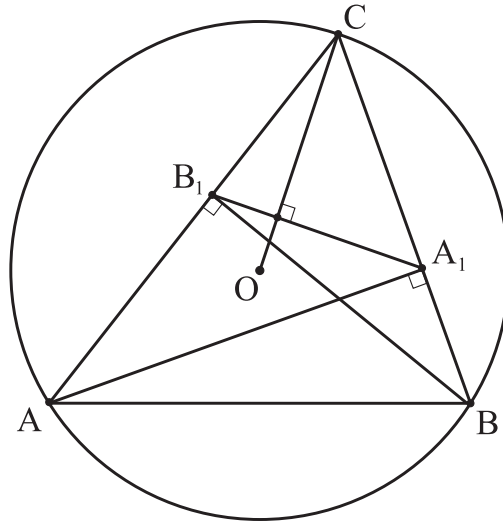
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c} \quad \text{или} \quad \frac{a+c+2b}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}.$$

Умножив полученное равенство на $(a+b)(b+c)(a+c)$ и приведя подобные слагаемые, получаем $a^2 + c^2 = 2b^2$.

□

10.3. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке.

Решение.

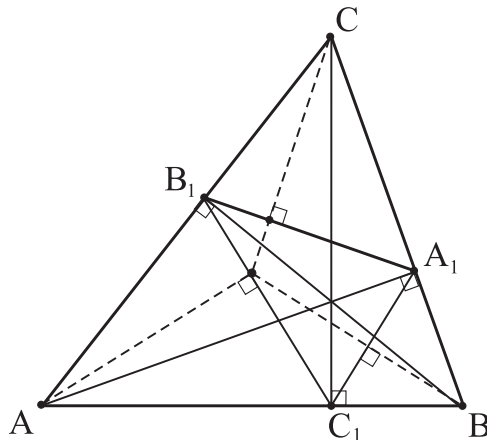


Справедливо следующее утверждение

Лемма. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC , точка O – центр описанной окружности треугольника ABC . Тогда $CO \perp A_1B_1$.

Доказательство. Поскольку точки B , A_1 , B_1 и A лежат на окружности с диаметром AB , то $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ и кроме того, $\angle ACO = 90^\circ - \angle CBA$, откуда и следует искомая перпендикулярность.

Согласно лемме, указанные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC .



□

10.4. Найдите все такие простые числа p , q и r , для которых числа

$$|p - q|, |q - r|, |r - p|$$

также простые.

Ответ. 2, 5 и 7.

Решение. Из условия следует, что все числа p , q и r различны. Без ограничения общности будем считать, что $p > q > r$. Если все числа p , q и r нечётные, то их разности чётны, но они не все равны 2, что невозможно.

Тогда $r = 2$, а p и q нечётны, а это означает, что $p - q = 2$. Тогда одно из чисел $p - r$ или $q - r$ должно делиться на 3, так как $q > 3$. Это означает, что $p - 2 = 3$ или $q - 2 = 3$, что невозможно.

Таким образом, $q = 5$, а $p = 7$.

□

10.5. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках одной строки или же во всех клетках одного столбца. Можно ли, пользуясь только этими операциями, получить 2025 минусов?

Ответ. Нет.

Решение. Поскольку порядок замены знаков не важен, то считаем, что вначале поменяли знаки в n строках, затем в p столбцах. Число минусов стало $(n + p) \cdot 100 - np = 2025$ или $(100 - n)(100 - p) = 7975$. Отметим, что $1 \leq n, p \leq 100$. Разложим число 7975 на простые множители, то есть $7975 = 5^2 \cdot 11 \cdot 29$. Откуда видно, что это число нельзя разложить на два множителя, каждый из которых меньше 100.

□