

1. **Ответ:** существуют. **Решение.** Заметим, что $\sqrt[3]{2025} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 75} = 3\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{75} + 2\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{8 \cdot 75} = \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{600}$. Поэтому можно взять $m = 75$, $n = 600$.

2. **Ответ:** могло. **Решение.** Так как правду могли сказать только рыцари, далее будем рассматривать рыцарей; выясним, могло ли оказаться так, что рыцарей за столом ровно половина от числа присутствующих. Пусть рыцарь R_1 сказал про R_2 , что тот рыцарь; тогда R_2 действительно рыцарь. Он, в свою очередь, сказал про R_3 , что тот рыцарь, и т.д. В цепочке рыцарей $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \dots \rightarrow R_n \rightarrow \dots$ обязательно кто-то повторится (потому что можно выписать цепочку, включающую больше рыцарей, чем всего присутствующих за столом); таким образом, имеется цикл, состоящий из рыцарей (возможно, проходя цикл, мы сделаем не один, а несколько оборотов вокруг стола); рассмотрим далее этот цикл.

Пусть при перемещении от рыцаря к рыцарю по циклу мы прошли один оборот вокруг стола. В этом случае разделим присутствующих за столом на группы; каждая группа начинается с очередного рыцаря, выписанного в цепочке выше, и заканчивается человеком, сидящим перед следующим рыцарем в цепочке. В группе либо 3, либо 5, либо 7 человек. Поэтому количество рыцарей в цикле не менее, чем седьмая часть и не более, чем треть от количества присутствующих за столом, т.е. от 9 до 20. Если, переходя от рыцаря к рыцарю в цепочке выше, мы прошли k кругов вокруг стола, то количество рыцарей в цикле не менее $9k$ и не более $20k$. Так как количество рыцарей в цикле должно быть не больше, чем половина от количества сидящих за столом, то $9k \leq 30$, а значит, мы прошли не более трёх кругов. Циклов может быть несколько; направления стрелок во всех циклах против часовой стрелки. Пересекаться, но не совпадать циклы не могут.

Понимая, как может быть устроен пример, теперь уже не сложно построить его (примеров очень много). Сначала выпишем какой-нибудь цикл из рыцарей (например, сидящих на местах, кратных 3): $60 \rightarrow 57 \rightarrow 54 \rightarrow 51 \rightarrow 48 \rightarrow 45 \rightarrow 42 \rightarrow 39 \rightarrow 36 \rightarrow 33 \rightarrow 30 \rightarrow 27 \rightarrow 24 \rightarrow 21 \rightarrow 18 \rightarrow 15 \rightarrow 12 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 60$.

Затем добавим недостающее количество рыцарей (надо ещё 10): цепочки, в которые входят эти рыцари, должны заканчиваться в вершинах цикла. Например, можно добавить рыцарей, сидящих на местах под следующими номерами: $35 \rightarrow 32 \rightarrow 29 \rightarrow 26 \rightarrow 23 \rightarrow 20 \rightarrow 17 \rightarrow 14 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow 3$.

Осталось проверить, что пример удовлетворяет условию. Каждый рыцарь говорит про рыцаря по стрелке от себя. Проверим, что каждый лжец может сказать неправду; для любого лжеца по крайней мере один из двоих (сидящий справа от него через двух человек и сидящий справа от него через четырёх человек) должен быть лжецом. Для лжеца, занимающего место под номером $3k + 1$ при некотором натуральном k (все места, номера которых дают остаток 1 при делении на 3, заняты лжецами), лжец, занимающий место под номером на 3 меньше, искомый. Для лжеца, занимающего место 1, лжец, занимающий место 58, искомый.

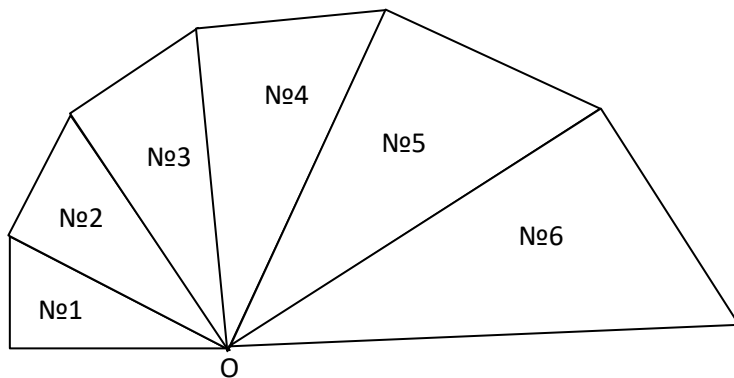
Рассмотрим лжецов на местах под номерами 5, 2, 59, 56, 53, 50, 47, 44, 41, 38, дающими остаток 2 при делении на 3. Для каждого из них искомым является следующий лжец в этом списке, а для лжеца на месте 38 – лжец на месте 31.

3. **Ответ:** 1350. **Решение.** Так как 1350 делится на 2, наибольший собственный делитель числа 1350 равен 675. Проверка: $1350 + 675 = 2025$.

Найдём все числа, удовлетворяющие условию задачи. Пусть p – наименьший простой делитель искомого числа n . Пусть $n = pk$. Тогда k – наибольший собственный делитель числа n . Требуется найти такое n , что $pk + k = 2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, т.е. $p + 1$ является делителем правой части. При $p + 1 = 3$ получаем $k = 675$ и ответ 1350. При $p + 1 = 5, 9, 15, \dots$ получаем, что $p + 1$ нечётно, а значит, p чётно и больше 2; это противоречит простоте числа p . Таким образом, ответ единственный.

4. **Ответ:** при всех натуральных n от 3 до 12. **Решение.** Очевидно, у многоугольника, который составляет Петя, не может быть меньше трёх вершин. Докажем, что их не может быть больше 12. Все углы треугольников кратны 30 градусам, поэтому все углы многоугольника также кратны 30 градусам. Ввиду выпуклости многоугольника его углы не больше 150° . Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$; с другой стороны, по доказанному она не больше $150^\circ \cdot n$. Приравняв, получаем $150^\circ \cdot n \geq 180^\circ(n - 2)$. После раскрытия скобок и приведения подобных $180^\circ \cdot 2 \geq 30^\circ \cdot n$, откуда $n \leq 12$.

Осталось построить примеры для всех $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Отметим на плоскости точку O и вокруг неё построим треугольники как на рисунке (сначала треугольник №1, затем №2 и так далее, до №6) так, что больший катет нового треугольника равен гипотенузе предыдущего. В процессе построения образуются выпуклые n -угольники при $n = 3, 4, 5, 6, 7$ (после добавления шестого треугольника будет всё ещё 7-угольник, так как точка O будет лежать на его стороне). Пусть M – многоугольник из шести треугольников на рисунке.



Для построения 11-угольника воспользуемся следующей идеей: отразим M симметрично относительно нижней стороны M , получим многоугольник M' ; тогда треугольник №1 и симметричный ему треугольник в объединении составят равносторонний треугольник, и всего вершин в многоугольнике (объединении M и M') будет 11.

Для построения 12-угольника сначала построим многоугольник M'' , центрально-симметричный M относительно середины нижней стороны M . Объединение M и M'' будет 12-угольником.

Для построения 8-угольника добавим к M снизу стандартный треугольник такой, что его гипотенуза совпадает с нижней стороной M . Для построения 9-угольника рассмотрим многоугольник, состоящий из треугольников №1 и №2; назовём его P . Рассмотрим многоугольник P' , подобный P , такой, что его наибольшая сторона равна нижней стороне M ; приставим P' снизу к M так, чтобы их наибольшие стороны совпали. Этим способом можно получить примеры и для $n = 10, n = 11$.

5. **Ответ:** выиграет Таня. **Первое решение.** Первым ходом Таня вместо исходного числа 10^{2025} пишет на доску числа 2^{2025} и 5^{2025} . Далее Таня будет действовать так, чтобы всегда после её хода числа на доске имели вид $2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, 2^{\alpha_n}, 5^{\alpha_1}, 5^{\alpha_2}, \dots, 5^{\alpha_n}$

(на доске только степени двойки и степени пятёрки, причём напротив каждой степени двойки находится степень пятёрки с тем же показателем).

После первого хода Тани это верно. Пусть после какого-то хода Тани числа на доске имеют указанный вид.

1) Если Саша заменит, например, 2^{α_i} на 2^{β} и 2^{γ} , то Таня заменит 5^{α_i} на 5^{β} и 5^{γ} .

2) Если Саша сотрёт с доски число 2^{α_i} , то Таня сотрёт с доски число 5^{α_i} .

3) Если $\alpha_i = \alpha_j$ для некоторых i и j , и если Саша сотрёт с доски числа 2^{α_i} и 2^{α_j} , то Таня сотрёт с доски числа 5^{α_i} и 5^{α_j} .

В не рассмотренных выше случаях (т.е. если Саша делает ход, стирая или заменяя степень пятёрки) Таня действует аналогично рассмотренным случаям (делая то же с соответствующей степенью двойки).

Таким образом, на каждый ход Саши Таня может ответить «симметричным» ходом. Заметим, что во всех рассмотренных случаях после хода Тани числа на доске имеют вид, указанный в начале решения; это значит, что Таня может продолжать пользоваться данной стратегией.

Заметим, что первый вид действий (разложение на целые множители, большие 1) может быть выполнен лишь конечное число раз; рассмотрим последнее действие этого вида в игре. После того, как оно выполнено, заметим, что действия второго и третьего видов уменьшают количество чисел на доске, а значит, также могут быть выполнены лишь конечное число раз. Поэтому рано или поздно ходы в игре закончатся. Так как у Тани всегда есть ответный ход, игроком, у которого закончатся ходы, будет Саша.

Второе решение. В условии задачи имеется опечатка: было не сказано, что Таня не может первым ходом стереть единственное число. Таким образом, имеется решение, альтернативное написанному выше: Таня стирает первым ходом единственное число и выигрывает. Это также полное решение данной задачи.