

Критерии и методика оценивания выполненных олимпиадных заданий

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ**

**КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ
ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО
ТУРА**

**возрастной группы (10 класс) муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
2025/2026 учебный год**

Максимальная оценка результатов участника возрастной группы (10 класс) определяется арифметической суммой всех баллов, полученных за выполнение заданий и не должна превышать **35 баллов**.

Задание 1.

Правильный ответ.

0.

Решение.

Среди сомножителей присутствует скобка $(x - x)$.

Оценка задания.

Верное решение – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 2.

Правильный ответ.

Вася.

Решение.

Назовём башенку *белой*, если её нижний и верхний кубики белые, и *бело-чёрной*, если её нижний кубик белый, а верхний чёрный. Аналогично определяются чёрная и чёрно-белая башенки. В начале игры имеется 50 белых и 50 чёрных башенок. Петя из белой и чёрной башенок соберёт *разноцветную* (чёрно-белую или бело-чёрную). В любом случае Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеивает белую башенку. В результате остаются по 49 белых и чёрных башенок. Далее Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после своего хода две белые и две чёрные башенки. Петя своим ходом снова соберёт разноцветную башенку. Теперь Вася из оставшихся белой и чёрной башенок соберёт противоположную башенку (чёрно-белую, если Петя собрал бело-чёрную), и у Пети не будет хода.

Оценка задания.

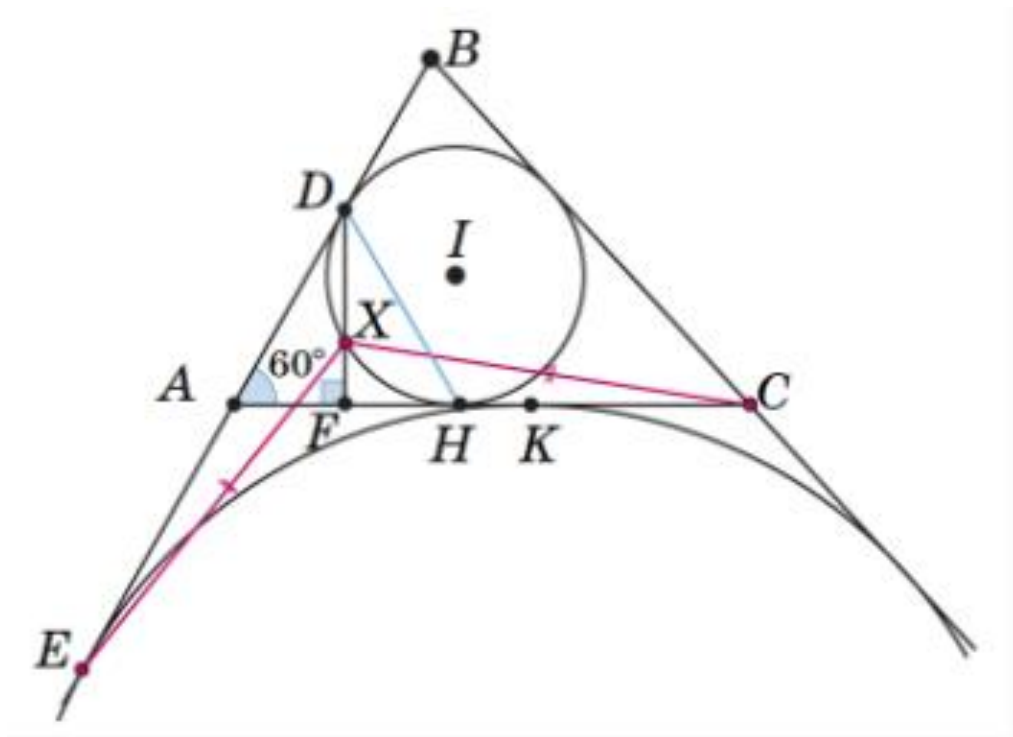
Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 3.

Решение.

Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H , невписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K , перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X . Поскольку $AD=AH$, $\angle A=60^\circ$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH=2\angle XDH=60^\circ=\angle AIH$,

точка X лежит на прямой AI , то есть является центром треугольника ADH . По свойствам касательных вписанной и внеписанной окружностям, $AE=AK=CH$. Кроме того, $AX=HX$, $\angle EAX=150^\circ=\angle CHX$. Следовательно, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE=XC$.



Оценка задания.

Верное решение – **7 баллов**, решение в целом верное, но имеются некоторые неточности – **5 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 4.

Правильный ответ.

45.

Решение.

Пример. Пусть верхний слой состоит из центральной клетки. Далее пусть каждый нижележащий слой состоит из клеток предыдущего слоя и из клеток, примыкающих к ним по стороне, и имеет противоположный цвет.

Оценка.

Первый способ. Можно считать, что первый наклеенный кусок – весь квадрат, от этого ничего не испортится. Рассмотрим все диагонали, идущие в том же направлении, что и диагональ, идущая из правого верхнего угла в левый нижний. Всего их 89 (включая угловые клетки-диагонали). Занумеруем их подряд от левого нижнего угла к правому верхнему. Назовём диагональ *готовой*, если все её клетки в данный момент имеют тот же цвет,

который будет у них в итоге, когда вся доска приобретёт шахматную раскраску. Будем следить за следующей величиной: количество пар соседних готовых диагоналей (порядок диагоналей в паре не учитываем). Заметим, что в любой такой паре диагонали имеют разный цвет. Пусть мы наклеили очередной кусок. Рассмотрим диагональ с наименьшим номером k , пересекающую этот кусок, и диагональ с наибольшим номером l , пересекающую этот кусок. Любая пара соседних диагоналей с номерами от k до l включительно не может быть готовой – они все пересекают новый кусок, а значит, в них найдутся клетки одного и того же цвета. Также не могут образоваться новые пары готовых диагоналей, не пересекающих добавленный кусок. Значит, могут появиться максимум две пары готовых диагоналей: пара $k-1, k$ и пара $l, l+1$.

После первого хода у нас 0 пар готовых диагоналей, а в конце – 88 пар. Так как каждым ходом добавляются максимум две пары, надо сделать ещё минимум 44 хода, всего 45 ходов.

Второй способ. Можно считать, что первый наклеенный кусок весь квадрат, от этого ничего не испортится. Считаем его нулевым. Докажем индукцией по k утверждение: *После еще k кусков между любыми двумя клетками есть путь с не более чем $2k$ сменами цвета.*

База при $k=0$ верна.

Рассмотрим наклеивание k -го куска S . Пусть до этого между двумя клетками был путь с не более $2(k-1)$ сменами цвета. Если он не заходил в S , то он таким и остался. Иначе заменим его кусок от первой его клетки в S до последней такой клетки на путь по S между этими клетками. Тогда количество смен цвета в новом пути увеличилось не более чем на 2 по сравнению со старым. Переход доказан.

В конце между противоположными углами любой путь имеет хотя бы 88 смен цвета. Значит, поверх нулевого куска наклеено еще хотя бы 44.

Третий способ. 1. Пронумеруем все куски в порядке выкладывания. 2. Пройдёмся по кускам от первого номера к последнему. Если встречаем кусок, пересекающийся с одним из предыдущих, то кусок с меньшим номером можем продлить на всю площадь верхнего. Далее начинаем процесс сначала, и так можно добиться, что для любых двух кусков либо нет общих клеток, либо множество клеток одного является подмножеством клеток другого. Выкидываем бессмысленные куски, типа чёрный, лежащий непосредственно на чёрном, или кусок, который в точности накрывает предыдущий. 3. Теперь можем разбить все куски на слои. Первый слой – один кусок. Второй слой – все куски, лежащие непосредственно на первом куске. Третий слой – все куски, лежащие непосредственно на кусках второго слоя, и т. д. Очевидно, цвета кусков будут чередоваться

по

слоям.

4. Рассмотрим куски второго слоя. Пусть для определённости он белый. Вся непокрытая ими часть первого слоя не будет покрыта уже ничем, поэтому представляет из себя подмножество чёрных клеток шахматной доски. Значит, расстояние между двумя ближайшими клетками двух разных белых кусков – не более 1 чёрной клетки первого слоя. Если расстояние нулевое, то можем объединить такие два куска – кусков станет меньше, а картинка не изменится. Если расстояние равно одной чёрной клетке, объединим эти два белых куска, добавив между ними одну белую клетку. И добавим один новый чёрный кусок, положив его сверху на эту клетку. Таким образом, итоговая картинка не изменилась, общее количество кусков не изменилось, во втором слое теперь на один белый кусок меньше, а в третьем – на один чёрный кусок больше. Действуя так далее, можем добиться, что во втором слое только один кусок. Далее аналогично (предварительно проведя заново действия 1-3), добиваемся, что в третьем слое – только один кусок, и т.д.

5. Процесс когда-то закончится, так как каждый следующий слой покрывает лишь часть предыдущего. Заметим, что самый верхний кусок может состоять только из одной клетки (на шахматной доске нет двух соседних клеток одного цвета), обозначим эту клетку К.

Рассмотрим самый дальний от этой клетки угол доски, пусть это левый нижний. Рассмотрим диагонали, идущие слева сверху вправо вниз. Пронумеруем их от дальнего угла до нашей клетки К. Так как это самый дальний угол, то К окажется минимум на 45-й диагонали.

Пойдём теперь по слоям сверху вниз. Самый верхний слой заходит не ниже 45-й диагонали. Каждый следующий слой может зайти своими клетками не более чем на одну новую диагональ (т.к. клетки одного слоя одинакового цвета, а цвета диагоналей чередуются, то «перепрыгнуть» через диагональ противоположного цвета слой не может). Поэтому, чтобы покрыть дальнюю угловую клетку, нужно добавить минимум 44 слоя. Итого получается 45 слоёв, то есть требуется минимум 45 кусков.

Четвёртый способ. *Идея:* запустить процесс в обратном порядке и посмотреть, что покрытая часть «разрастается не слишком быстро». И даже проекция на диагональ покрытой части «разрастается не слишком быстро».

Схема решения. Пусть $K_1, K_2, \dots, K_N$ – куски, занумерованные с конца, так что K_1 положили последним, K_2 – предпоследним, и т.д., K_N – первым. Положим $L_n = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$, в частности, L_N – множество всех клеток доски. Ясно, что множество $K_{n+1} \setminus L_n$ не может содержать двух соседних клеток, иначе они после наклеивания в исходном процессе останутся одноцветными. (В частности, $|K_1| = 1$.) Занумеруем подряд $1, 2, \dots, (2n-1)$ диагонали одного направления, и пусть K'_i и L'_i –

множество номеров диагоналей, пересекающихся с K_i и L_i соответственно. Так как K_i связно, то K'_i – отрезок (то есть подмножество множества $\{1, 2, \dots, (2n-1)\}$, состоящее из нескольких последовательных чисел). Кроме того, $K'_{n+1} \setminus L'_n$ не может содержать двух соседних чисел. Действительно, предположим противное, и $i, i+1 \in K'_{n+1} \setminus L'_n$. Тогда ломаная, разделяющая i -ю и $(i+1)$ -ю диагонали, в силу связности K_{n+1} , разрезает некоторую доминошку, целиком лежащую в K_{n+1} , но ни одна из клеток этой доминошки не принадлежит L_n , что противоречит доказанному ранее. Пусть L'_i состоит из t_i непродолжаемых отрезков. Покажем, что величина $s_n = |L'_n| + t_n$ при переходе от n к $n+1$ увеличивается не более чем на 2. Отсюда будет следовать нужная оценка $N \geq 45$, так как $s_1 = 2$ и $s_N = 90$.

Пусть $x = |L'_{n+1}| - |L'_n| = |K'_{n+1} \setminus L'_n|$, то есть отрезок K'_{n+1} добавляет в L'_n x чисел. Пусть $x \geq 2$. Тогда (так как по доказанному среди этих чисел нет пары соседних чисел) отрезок K'_{n+1} покрывает хотя бы $(x-1)$ отрезков множества L'_n , значит, $t_{n+1} \leq t_n - x + 2$. Получаем $s_{n+1} = |L'_{n+1}| + t_{n+1} \leq (|L'_n| + x) + (t_n - x + 2) = s_n + 2$, что и требовалось. Если же $x = 1$, то, очевидно, $t_{n+1} \leq t_n + 1$ и $s_{n+1} = |L'_{n+1}| + t_{n+1} \leq (|L'_n| + 1) + (t_n + 1) = s_n + 2$, что и требовалось.

Оценка задания.

Любое верное обоснованное решение – **7 баллов**, верный ответ, но в обосновании есть некоторые неточности – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

Задание 5.

Правильный ответ.

Не обязательно.

Решение.

Решение 1

Контрпример. Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя – 18 оборотов, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на 38 оборота против часовой стрелки. Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (то есть условия выполнены). Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, то есть все их встречи происходят через чётное число часов после «утра», и значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через нечётное число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

Решение 2

Пусть p и q – произвольные различные действительные числа. Пусть «утром» длинная и короткая стрелки стартуют из одного положения и идут со скоростями p и q оборотов в час

соответственно. Далее эти стрелки совпадают в точности в те моменты, когда более быстрая из них прошла на целое число оборотов больше, чем другая. Так как множество целых положительных чисел счётно, то и таких моментов счётно, а значит, множество положений в которых эти стрелки совпадают не более чем счётно (в случае, когда pq рационально, этих положений конечное количество). Тогда пусть средняя стрелка неподвижно стоит в положении отличном от всех вышеописанных. Теперь умножим скорости всех стрелок на одно и тоже положительное число (положения встреч длинной и коротких стрелок не поменяются) так, чтобы через q часов после «утра» длинная заняла положение средней. Тогда через p часов после «утра» короткая займёт это положение (отношение скоростей не поменялось). Теперь увеличим скорости всех стрелок на одно и то же положительное число, скорости станут ненулевыми, а даты встреч соответствующих стрелок не изменятся (в частности, не появится одновременной встречи всех стрелок). В частности, при $p = 7$, $q = 3$ получаем в точности ситуацию, описанную в условии.

Решение 3

Пусть угловые скорости короткой, средней и длинной стрелок равны соответственно α , $\alpha + \beta$ и $\alpha + \gamma$ градусов в час (нам удобны именно эти обозначения, ведь β и γ окажутся относительными скоростями стрелок), причём эти числа положительны. Назовём утреннее направление короткой стрелки (совпадающее с направлением длинной) начальным. Пусть средняя в этот момент отстояла от начального направления на угол δ градусов по часовой стрелке. Тогда через t часов после начального момента короткая стрелка отстоит от начального направления на αt градусов, средняя – на $(\alpha + \beta)t + \delta$ градусов, длинная – на $(\alpha + \gamma)t$ градусов. Чтобы через 3 часа длинная и средняя стрелки совпали, достаточно выполнения равенства $3(\alpha + \gamma) = 3(\alpha + \beta) + \delta$, или, что то же самое, $\delta = 3(\gamma - \beta)$. Аналогично, чтобы ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки совпали, достаточно того, чтобы $7\alpha = 7(\alpha + \beta) + \delta$, то есть $\delta = -7\beta$. Итого, для выполнения условия задачи достаточно выполнения равенств $\beta = -\delta/7$, $\gamma = 4\delta/21$. Докажем, что при иррациональном δ все три стрелки никогда не встретятся. Предположим противное. Чтобы три стрелки когда-нибудь встретились, необходимо и достаточно существования положительного вещественного числа T , для которого попарные разности $((\alpha + \beta)T + \delta) - \alpha T$, и $(\alpha + \gamma)T - \alpha T$ оказались целыми числами, кратными 360. Иными словами, числа $\delta + \beta T$ и γT целые и кратны 360. Подставим значения β и γ . Получим, что для некоторого T будут целыми числа $\delta \cdot (1 - T/7)$ и $\delta \cdot 4T/21$. Отсюда отношение $\delta \cdot (1 - T/7) / (\delta \cdot 4T/21)$ рационально. Но тогда и T рационально! Отсюда иррационально число $\delta/4T/21$ как произведение ненулевого рационального и иррационального. Но оно должно быть целым. Противоречие.

Оценка задания.

Верное решение – **7 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.