

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ**

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

Решения задач.

11.1. Выпишем первые члены данной последовательности: 1, 2000, 1999, 1, 1998, 1997, 1, 1996, 1995, Можно заметить закономерность: члены последовательности располагаются следующим образом 1, n , $n - 1$; 1, $n - 2$, $n - 3$; 1, ..., при этом их можно разбить на тройки. 2025-й член будет находиться в 675 – й тройке ($2025:3 = 675$), которая будет иметь вид: 1, 652, 651. Поэтому на 2025-м месте будет стоять число 651.

Ответ: 651.

Комментарий:

1 балл – нашел число подбором,

5 баллов – заметил закономерность, но неправильно определил нужный член последовательности.

11.2. Введем следующие обозначения:

x — собственная скорость моторной лодки;

y — скорость течения реки.

В первый день турист проплыл расстояние

$S_1 = 2y + 5(x + y) + 3(x - y) = 8x + 4y$ (километров) за время

$t_1 = 2 + 5 + 3 = 10$ (часов).

Во второй день турист проплыл расстояние $S_2 = y + 4(x + y) + 2(x - y) = 6x + 3y$ (километров) за время $t_2 = 1 + 4 + 2 = 7$ (часов). Средняя скорость движения туриста в первый день будет:

$v_{\text{ср.1}} = \frac{S_1}{t_1} = \frac{8x+4y}{10} = \frac{4(2x+y)}{10}$. По условию она равна 28 км/ч. Тогда имеем:

$\frac{4(2x+y)}{10} = 28$. Из этого уравнения находим $2x + y = 70$. Найдем среднюю скорость туриста во второй день:

$v_{\text{ср.2}} = \frac{S_2}{t_2} = \frac{6x+3y}{7} = \frac{3(2x+y)}{7} = \frac{3 \cdot 70}{7} = 30$ (км/ч).

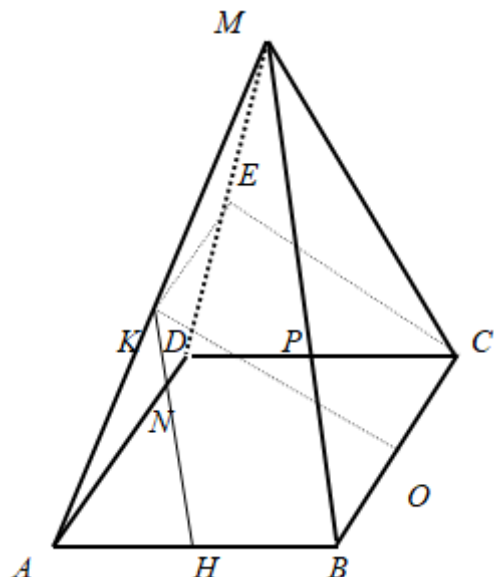
Ответ: 30 км/ч.

Комментарий:

3 балла – верно составил выражения для средних скоростей в первый и второй день, но найти среднюю скорость во второй день не смог.

11.3. Выполним чертеж. Обозначим середину отрезка MA буквой K , а середины сторон квадрата $ABCD$ буквами H, O, P и N . Рассмотрим $\triangle AMB$.

В нем KH – средняя линия, поэтому $KH = \frac{1}{2}MB = 8,5$ (см).



Проведем $KE \parallel AD$, тогда $KECO$ – параллелограмм ($KE \parallel AD$, $AD \parallel BC$, поэтому $KE \parallel OC$. Также $KE = OC = \frac{1}{2}AD$). Применяя теорему косинусов для $\triangle$

DMC и $\triangle EMC$, находим $\cos \angle DMC = \frac{271}{289}$ и $EC = 9,5$ см. Значит и $KO = 9,5$ см. Оставшиеся два расстояния находятся аналогично и будут равны: $KN = 8,5$ см и $KP = 9,5$ см.

Ответ: 8,5 см; 8,5 см; 9,5 см; 9,5 см.

Комментарий:

1 балл – верно нашел KN и KH ,

5 баллов – верно нашел KN и KH , но при применении теоремы косинусов для нахождения других расстояний совершил вычислительные ошибки.

11.4. Так как правая часть уравнения положительная и $2^{\frac{1}{x}} > 0$, $2^x > 0$, то $x > 0$. Оценим левую часть уравнения с помощью неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$:

$$x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot 2^x \geq 2\sqrt{x \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2^x} = 2\sqrt{2^{\frac{1}{x} + x}} = 2\sqrt{2^2} = 4$$
 (неравенство применили два раза, сначала к слагаемым, затем к показателю степени числа 2).

Таким образом, левая часть уравнения всегда не менее 4, а правая всегда равна 4, поэтому решение будет, если левая часть уравнения равна 4. Это будет при $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Комментарий:

1 балл – верно нашел корень уравнения подбором,

3 балла – верно выбрал для оценки левой части уравнения соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим, но ошибся в его применении.

11.5. Рассмотрим 13 чисел с разным количеством цифр 3: 3, 33, 333, 3333, Предположим, что ни одно из них не делится на 13. При этом могут получиться 12 различных остатков при делении этих чисел на 13: 1, 2, 3, ..., 12. Так как чисел 13, а остатков – 12, то по принципу Дирихле найдутся как минимум два числа с одинаковым остатком при делении на 13. Разность данных чисел будет делиться на 13, это будет число вида 333...000 (сначала несколько троек, потом нули). Заметим, что число 10 взаимно просто с 13, поэтому если с конца числа убрать нули, то оставшееся число будет делиться на 13. Но это число состоит только из троек. Значит, мы нашли такое число. В частности, в качестве такого числа будет число, состоящее из шести троек: 333 333; из 12 троек: 333 333 333 333 и т.д.

Комментарий:

1 балл – нашел верно число подбором, доказательства нет,

4 балла – применил верно принцип Дирихле и получил число вида 333...30...0, но дальше продвинуться не смог.