

11 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x+2024} + \sqrt{x+2025}} - 1 = 0.$$

Ответ. $\frac{4\,092\,525}{4}$.

Решение. Преобразуем каждый член суммы:

$\frac{1}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x+k+1}} = \sqrt{x+k+1} - \sqrt{x+k}$ для $k = 1, 2, \dots, 2024$. Тогда левая часть уравнения примет вид: $\sum_{k=1}^{2024} (\sqrt{x+k+1} - \sqrt{x+k}) = \sqrt{x+2025} - \sqrt{x+1}$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\sqrt{x+2025} - \sqrt{x+1} = 1$$

Откуда получим $x = \frac{2021 \cdot 2025}{4} = \frac{4\,092\,525}{4}$

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Получено промежуточное уравнение – не менее 2 б.

Допущена арифметическая ошибка – не более 5 б.

2. На столе лежит N камней. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2 или 4 камня. Игрок, который не может сделать ход (когда камней не осталось), проигрывает. Для каких значений N у первого игрока есть выигрышная стратегия? Обоснуйте ответ.

О т в е т. Для N не кратных 3.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $N = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}$. Тогда выиграет второй игрок. В самом деле, если на предыдущем ходе первый игрок взял m -камней, то второй игрок должен взять либо $3 - m$ камней ($m = 1, 2$), либо, если это возможно, $6 - m$ камней ($m = 4$)

2) Пусть теперь $N = 3 \cdot k + 1$ или $N = 3 \cdot k + 2$, тогда выиграет первый игрок. В этом случае он на первом ходе должен взять количество камней равное остатку от деления N на 3. А далее придерживаться стратегии для второго игрока из первого пункта.

К р и т е р и и: Приведено полное верное решение – 7 б.

Замечено, что стратегия должна зависеть от остатка от деления N на 3 – не менее 3б.

Задача 3. Математик рассматривает в магазине часов исправно работающие механические секундомеры. Его интересует сумма расстояний от некоторой заданной точки до центров циферблатов секундомеров и сумма расстояний до концов стрелок секундомеров до той же точки. Верно ли, что в какой-то момент времени вторая сумма расстояний окажется больше чем первая? Ответ обоснуйте.

О т в е т. Да, верно.

Р е ш е н и е. Обозначим центры циферблатов секундомеров $S_1, S_2, S_3, \dots, S_m$, а заданную точку, от которой отмеряются расстояния, - O .

Рассмотрим момент времени t_1 и обозначим положение стрелки j -ого секундомера A_j , а диаметрально противоположную точку относительно центра циферблата S_j через B_j . Поскольку секундомеры исправные и имеют одинаковые угловые скорости, то они достигнут этих точек синхронно (за 30 сек.), в момент времени $t_2 = t_1 + 30$.

Заметим, что в силу неравенства треугольника для каждого $j = 1, \dots, m$ справедливы неравенства $2|OS_j| \leq |A_jO| + |B_jO|$.

При этом знак равенства может достигаться только при условии, что каждая тройка точек O, A_j и B_j лежат на одной прямой. Очевидно, что в этом случае найдется t_1 при котором хотя бы одно из этих неравенств будет строгим. С учетом этого замечания, просуммируем все эти неравенства и получим:

$$2 \sum_{j=1}^m |OS_j| < \sum_{j=1}^m (|A_jO| + |B_jO|) \quad (1)$$

Теперь если предположить противное, то тогда для моментов времени t_1 и t_2 выполнены неравенства

$\sum_{j=1}^m |OS_j| \geq \sum_{j=1}^m |A_j O|$ и $\sum_{j=1}^m |OS_j| \geq \sum_{j=1}^m |B_j O|$. А это противоречит (1). Следовательно, либо $\sum_{j=1}^m |OS_j| < \sum_{j=1}^m |A_j O|$ (расстояния измеренные в момент времени t_1) либо $\sum_{j=1}^m |OS_j| < \sum_{j=1}^m |B_j O|$ (расстояния измеренные в момент времени t_2).

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Рассмотрены частные случаи (специальное расположение секундомеров, все секундомеры запущены одновременно и др. варианты) – не более 2 б.

Рассмотрены неравенства вида $2|OS_j| \leq |A_j O| + |B_j O|$ без дальнейших продвижений – 2 б.

Обоснованно получено неравенство $2 \sum_{j=1}^m |OS_j| < \sum_{j=1}^m |A_j O| + |B_j O|$ – не менее 3 б.

При верном решении пропущены отдельные случаи (например случай когда для всех секундомеров $2|OS_j| = |A_j O| + |B_j O|$) – не более 6 б.

Задача 4. При каких значениях α неравенство

$$2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x > 0 \text{ верно для всех } x \in R.$$

О т в е т: При всех иррациональных α .

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть неравенства: $2 - 2\cos(\alpha x)\cos 3x - \sin^2 3x = 1 + \cos^2 3x - 2\cos(\alpha x)\cos 3x + \cos^2(\alpha x) - \cos^2(\alpha x) = (\cos(\alpha x) - \cos 3x)^2 + \sin^2(\alpha x)$.

Следовательно, $2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x = (\cos(\alpha x) - \cos 3x)^2 + \sin^2(\alpha x) \geq 0$ при всех вещественных x и α . Исключим те значения α при которых уравнение

$2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x = 0$ имеет хотя бы одно решение. Очевидно, что рассматриваемое уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \cos 3x - \cos(\alpha x) = 0 \\ \sin^2(\alpha x) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 0$, тогда $2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x = 0$ при $x = 2\pi k/3, k \in \mathbb{Z}$.

Пусть теперь α - произвольное ненулевое рациональное число, представим его в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$. Тогда системе уравнений удовлетворяет число $x = 2\pi q$. Отсюда следует, что при любом рациональном $\alpha = p/q$ неравенство

$$2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x > 0$$

нарушается по крайней мере при $x = 2\pi q$.

Если же α - иррациональное число, то из второго уравнения системы получим $x = \pi k/\alpha$. Но при этом $\cos 3\pi k/\alpha \neq \pm 1$. Таким образом, неравенство верно для всех x только в случае иррациональных α .

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Левая часть преобразована к сумме неотрицательных выражений — 2 б.

Доказано, что при иррациональных α неравенство верно, но нет полного анализа для рациональных α — 5 б.

Проведен полный верный анализ неравенства для рациональных α — не менее 5 б.

Задача 5 *DABC*- треугольная пирамида, у которой ребра *DC*, *DB* и *DA* - взаимно-перпендикулярны. *M* принадлежит плоскости *ABC* причем расстояние от этой точки до ребра *DC* равно 10, до ребра *DB* равно $4\sqrt{5}$ и до ребра *DA* равна $2\sqrt{13}$. Найдите минимально возможный объем пирамиды *DABC*.

О т в е т. $V_{ABCD} = 5184$

Р е ш е н и е. Введем декартову систему координат с началом в т. *D* и осями *DX*, *DY* и *DZ* совпадающими с *DA*, *DB* и *DC*. Обозначим $DA = a$, $DB = b$ и $DC = c$. Для точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости *ABC*, запишем уравнение (уравнение плоскости в отрезках)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

Пусть $M_1(0, y, z)$, $M_2(x, 0, z)$ и $M_3(x, y, 0)$ проекции точки M на плоскости CBD , ABD и ACD соответственно. Запишем расстояния от точки M до ребер DA , DB и DC :

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 52, \\ x^2 + z^2 = 80, \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

Откуда получим $x = 8$, $y = 6$, $z = 4$.

Из неравенства Коши для трёх чисел $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ и $\frac{z}{c}$, с учетом уравнения (1), получаем оценку

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}} = \sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{abc}}$$

Следовательно,

$$V_{DACB} = \frac{1}{3}abc \geq 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$$

Осталось заметить, что эти неравенства обращаются в равенство, когда

$$\frac{8}{a} = \frac{6}{b} = \frac{4}{c} = \frac{1}{3},$$

т. е. при $a = 24$, $b = 18$, $c = 12$.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Верно найдены координаты т. $M(x, y, z)$ – 3 б.

Получено уравнение для координат точки $M(x, y, z)$ – 2 б.

Верно получена оценка для объёма пирамиды - не менее 5 б.

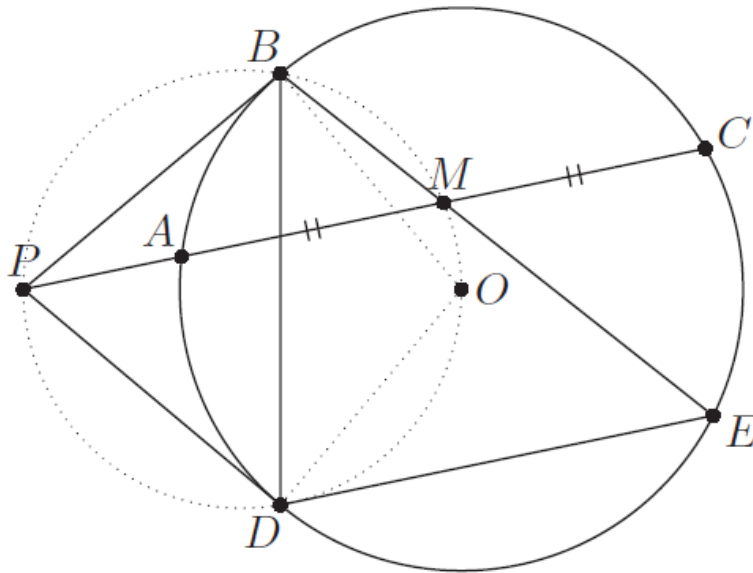
Задача 6 На плоскости заданы точки A, B, C, D, E и P такие, что:

- 1) точки A, B, C, D, E лежат на окружности ω , а точка P лежит вне этой окружности;
- 2) прямые PB и PD касаются окружности ω ;
- 3) точки P, A, C лежат на одной прямой и $DE \parallel AC$.

В каком отношении BE делит отрезок AC ?

Ответ. В отношении 1:1.

Р е ш е н и е. Пусть M — точка пересечения BE и AC , O — центр окружности ω .



Поскольку прямые PB и PD касаются окружности ω , то $\angle OBP = \angle ODP = 90^\circ$.

Отсюда следует, что через точки P, B, O и D можно провести окружность.

Докажем, что $OM \perp AC$. Теперь покажем, что M также лежит на этой окружности. Действительно, поскольку $DE \parallel AC$, мы имеем $\angle BMP = \angle BMA = \angle BED = \angle PBD = \angle BDP$. Следовательно, $\angle OMP = \angle OBP = 90^\circ$ и $AM = MC$.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение — 7 б.

Показано, что через точки P, B, O и D можно провести окружность — не менее 3 б.

Показано, что через точки P, B, O, D можно провести окружность — не менее 4 б.

Р е ш е н и е. 1) Покажем, что $DB = DI = DC$. Можно сослаться на «лемму о трезубце», она же «о куриной лапке», официальное название — лемма Мансиона.

2) Обозначим $x = DB = DI = DC$. В этом случае, поскольку $\angle IDE = \angle ADB = \angle ACB$, мы имеем

$$IE = ID \cdot \sin \angle IDE = x \sin C = x \cdot \frac{c}{2R}.$$

Аналогично, $IF = x \cdot \frac{b}{2R}$. С другой стороны, $AD \cdot a = x \cdot (b + c)$ по теореме Птолемея для четырёхугольника $ABDC$, поэтому $AD = \frac{x(b+c)}{a}$. Собирая всё вместе, мы получаем, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x(b+c)}{a} = IE + IF = \frac{x}{2R}(b+c).$$

Следовательно, мы получаем $a = R$ и тогда $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2}$. Таким образом: $\angle A = 30^\circ$ или $\angle A = 150^\circ$.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Показано, что $DB = DI = DC$ — 3 б.

Для IE и IF получены формулы вида $IE = ID \cdot \sin \angle IDE = x \sin C = x \cdot \frac{c}{2R}$. — 4 б.

Получено соотношение вида $AD \cdot a = x \cdot (b + c)$ — 5 б.

Показано, что $R = a$ — 6 б.