

Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2025 г.)

11 класс

1. Пусть $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Чему равно значение выражения $\frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^\Phi}{\varphi} + \frac{\Phi^\Phi \cdot \varphi^\varphi}{\Phi}$?

Решение. Легко показать, что $\Phi \cdot \varphi = 1$ и $\Phi = \varphi + 1$. Тогда

$$\frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^\Phi}{\varphi} = \frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^{\varphi+1}}{\varphi} = \frac{(\Phi \cdot \varphi)^\varphi \cdot \varphi}{\varphi} = \frac{1^\varphi \cdot \varphi}{\varphi} = 1.$$

$$\frac{\Phi^\Phi \cdot \varphi^\varphi}{\Phi} = \frac{\Phi^{\varphi+1} \cdot \varphi^\varphi}{\Phi} = \frac{(\Phi \cdot \varphi)^\varphi \cdot \Phi}{\Phi} = \frac{1^\varphi \cdot \Phi}{\Phi} = 1.$$

$$\text{Значит, } \frac{\Phi^\varphi \cdot \varphi^\Phi}{\varphi} + \frac{\Phi^\Phi \cdot \varphi^\varphi}{\Phi} = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

2. Имеется четыре кучки одинаковых монет: в двух кучках по 2025 монет, в третьей – 2024 монеты, а в четвертой – 2026 монет. Играют двое. Ходы делают по очереди. За один ход игрок может взять любое количество монет из любой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Как играть, чтобы выиграть?

Решение. Выигрывает первый игрок. Выигрышная стратегия состоит в уравнивании монет в кучках. Первый игрок первым своим ходом забирает 2 монеты из кучки, в которой 2026 монет. Первый игрок мысленно объединяет кучки в пары: в кучках первой пары по 2025 монет, в кучках второй пары – по 2024 монеты. Второй игрок каждым своим ходом вынужден нарушать равенство в одной из пар. Первый игрок следующим своим ходом это равенство восстанавливает.

3. Каждая сторона треугольника ABC разделена на 3 равных отрезка. Точки деления, прилежащие к вершинам углов (по одной на каждой стороне) соответственно соединены с вершинами противоположных углов. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь образовавшегося внутреннего треугольника?

Решение. Приведем решение задачи в общем случае. Пусть ABC данный треугольник (см. рисунок) и $AE : EB = BF : FC = CG : GA = k$. В нашем случае $k = 0,5$. Обозначим точки пересечения прямых AF и CE , BG и AF , CE и BG через K , L и M соответственно. Тогда $S_{KLM} = S_{ABC} - S_{AKC} - S_{BLA} - S_{CMB}$.

Вычислим площадь треугольника AKC . Для этого найдём отношение $EK : KC$. Проведём

прямую $EE' \parallel AF$. $\frac{EK}{KC} = \frac{E'F}{FC}$ и $\frac{BF}{E'F} = \frac{AB}{AE} = \frac{k+1}{k}$, поэтому

$$\frac{EK}{KC} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{k^2}{k+1}.$$

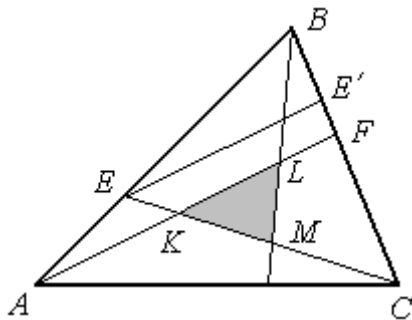
$$S_{AKC} = \frac{KC}{EC} \cdot S_{AEC} = \frac{KC}{EC} \cdot \frac{EA}{BA} \cdot S_{ABC} = \frac{k+1}{k^2+k+1} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot S_{ABC} = \frac{k}{k^2+k+1} \cdot S_{ABC}$$

$$\text{Аналогично, } S_{BLA} = S_{CMB} = \frac{k}{k^2+k+1} \cdot S_{ABC}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{3k}{k^2+k+1} = \frac{(1-k)^2}{1+k+k^2} = \frac{(1-k)^3}{1-k^3}. \text{ В нашем случае } k = 0,5, \text{ значит,}$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \frac{(1-k)^3}{1-k^3} = \frac{(1-0,5)^3}{1-0,5^3} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{7}.$$



4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \operatorname{tg} z; \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \operatorname{ctg} z \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что $\operatorname{tg} z \neq 0$, так как в противном случае что $\operatorname{ctg} z$ не определен. Пусть что $\operatorname{tg} z = a > 0$. Сложив оба уравнения, мы получим

$$\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = \sqrt{2} \operatorname{tg} z + \sqrt{2} \operatorname{ctg} z.$$

Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ и что $\sin y + \cos y = \sqrt{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

Причем равенства достигаются только при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и при $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$. То есть левая часть не больше $2\sqrt{2}$. Рассмотрим теперь правую часть. Она $(a + \frac{1}{a})\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$, причем равенство достигается при $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z = 1$, то есть при $z = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Таким образом, $(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) \leq 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)$. Уравнение имеет решения, только когда оба неравенства обращаются в равенства. Очевидно, что найденные x , y и z являются решением системы.

Пусть теперь $\operatorname{tg} z < 0$. Аналогичным образом находим решения:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, z = \frac{3\pi}{4} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n_1; \frac{\pi}{4} + 2\pi m_1; \frac{\pi}{4} + \pi k_1\right), n_1, m_1, k_1 \in \mathbb{Z}, \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n_2; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m_2; \frac{3\pi}{4} + \pi k_2\right), n_2, m_2, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

5. Даны цифры 1, 9, 5, 7. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из этих цифр так, чтобы две рядом стоящие цифры были различными и при этом нужно использовать все четыре цифры?

Решение. Легко показать, что из k цифр можно составить $k \cdot (k-1)^{n-1}$ n -значных чисел, в которых две рядом стоящие цифры различные. В нашем случае таких чисел будет $4 \cdot (4-1)^{10-1} = 4 \cdot 3^9 = 78732$.

Из 78732 нужно вычесть число тех чисел, в которых используются **только 1, 2 или 3** цифры (но с условием, что соседние цифры разные).

Применим принцип включений-исключений.

Пусть A_i – множество последовательностей, не содержащих i -ю цифру (из четырех). Нам нужно найти количество последовательностей, не входящих ни в одно A_i , то есть использующих все 4 цифры.

Формула: $N = \sum_{j=0}^4 (-1)^j C_4^j \cdot f(4-j)$, где $f(k)$ – число последовательностей длины 10, составленных из k фиксированных цифр, с условием, что соседние цифры различны. Ясно, что

$$f(k) = \begin{cases} k \cdot (k-1)^9, & k \geq 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Теперь вычислим члены:

$$j=0 : +C_4^0 \cdot f(4) = 1 \cdot 4 \cdot 3^9 = 78732$$

$$j=1 : -C_4^1 \cdot f(3) = -4 \cdot (3 \cdot 2^9) = -4 \cdot (3 \cdot 512) = -4 \cdot 1536 = -6144$$

$$j=2 : +C_4^2 \cdot f(2) = 6 \cdot (2 \cdot 1^9) = 6 \cdot 2 = 12$$

$$j=3 : -C_4^3 \cdot f(1) = -4 \cdot (1 \cdot 0^9) = -4 \cdot 0 = 0$$

$$j=4 : +C_4^4 \cdot f(0) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Сумма:

$$N = 78732 - 6144 + 12 = 72600.$$

Ответ: 72600