

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.  
2025-2026 ГГ. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11-Й КЛАСС

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1

1. УСЛОВИЕ. Доказать, что множество простых чисел вида  $4k + 3$  бесконечно.

1. РЕШЕНИЕ. Предположим, что множество всех простых чисел вида  $4k + 3$  конечно. Пусть  $p_1 = 3, p_2 = 7, \dots, p_n, n < \infty$  - все такие числа. Рассмотрим число вида

$$N = 4p_2p_3 \cdots p_n + 3.$$

Число  $N$  имеет вид  $4k + 3$  и, поэтому, составное, так как  $N$  больше любого из чисел  $p_k, k = 1, \dots, n$ .

Если число  $N$  делится только на простые числа вида  $4k + 1$ , то само это число должно иметь вид  $4k + 1$ , что не так. Следовательно, найдется хотя бы одно простое число вида  $4k + 3$ , которое делит  $N$ . Обозначим это простое число через  $\tilde{p}$ . Так как число  $\tilde{p}$  не может делить произведение  $p_2p_3 \cdots p_n$ , то оно больше любого простого из этого произведения. Таким образом, каким бы ни было простое число  $p_n$  вида  $4k + 3$ , всегда найдется простое число такого же вида, большее, чем  $p_n$ . Получаем противоречие, из которого вытекает бесконечность простых чисел вида  $4k + 3$ .

**Критерии.** Задача полностью решена - 7 баллов. Сделано предположение о конечности простых чисел указанной структуры и записано число  $N$  - 3 балла.

ЗАДАЧА 2

2. УСЛОВИЕ. Вычислить  $\sin \frac{\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ .

2. РЕШЕНИЕ. Так как угол  $\frac{\pi}{5}$  находится в первой четверти, то искомые величины положительны.

Введем следующие обозначения  $x = \sin \frac{\pi}{5}$ ,  $y = \cos \frac{\pi}{5}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \cos \frac{3\pi}{5} &= \cos \left( \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} = \left( 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 \right) \cos \frac{\pi}{5} - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \\ &= \left( 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 \right) \cos \frac{\pi}{5} - 2 \left( 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5} \right) \cos \frac{\pi}{5} = 4 \cos^3 \frac{\pi}{5} - 3 \cos \frac{\pi}{5} = 4y^3 - 3y. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos \left( \pi - \frac{2\pi}{5} \right) = -\cos \frac{2\pi}{5} = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - 2y^2.$$

Таким образом, получаем уравнение  $4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = 0$ , одним из корней которого является  $y = -1$ . Так как  $4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = (y + 1)(4y^2 - 2y - 1)$ , то искомое значение является положительным корнем уравнения  $4y^2 - 2y - 1 = 0$ , то есть

$$y = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Отсюда

$$x = \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}.$$

Ответ.  $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}, \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}.$

**Критерии.** Задача полностью решена - 7 баллов. Задача верно сведена к алгебраическому уравнению  $4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = 0$  - 4 балла.  $\sin \frac{3\pi}{5}, \cos \frac{3\pi}{5}$  правильно выражены через  $\sin \frac{\pi}{5}$  и  $\cos \frac{\pi}{5}$  соответственно - 1 балл.

### ЗАДАЧА 3

3. УСЛОВИЕ. В тетраэдре (необязательно правильном) два противоположных ребра имеют одинаковую длину  $a$  и они перпендикулярны друг другу. Кроме того, каждое из них перпендикулярно отрезку длиной  $b$ , который соединяет их середины. Выразить объем тетраэдра через  $a$  и  $b$  и обосновать полученное выражение.

3. РЕШЕНИЕ. Плоскость, проходящая через одно ребро длиной  $a$  и перпендикуляр длиной  $b$ , разбивает тетраэдр на два более удобных равногранных тетраэдра, каждый с площадью основания  $ab/2$  и высотой  $a/2$ . Следовательно, требуемый объем равен

$$2 * \frac{1}{3} * \frac{ab}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2b}{6}$$

**Критерии.** Задача полностью решена - 7 баллов. Есть правильно построение и первоначальные продвижения в решении - 2 балла

### ЗАДАЧА 4

4. УСЛОВИЕ. В турнире принимают участие 2026 участников. В первом круге турнира каждый участник играет только один раз, так что оказывается сыгранными 1013 игр парами игроков. Вычислить сколькими различными способами могли быть сформированы пары в первом круге.

4. РЕШЕНИЕ. Рассмотрим 4 участника. С первым участником могут сыграть любой из трёх остальных. После выбора пары для первого участника вторая пара определяется однозначно. Следовательно на 4 участников  $3 * 1 = 3$  вариантов различных пар. Если участников 6, то с первым могут сыграть любые 5 участников. Остается 4 участника и повторяются рассуждения для 4 участников. Получается  $5 * 3 * 1$  вариантов. Продолжая рассуждения приходим к выводу, что для 2026 участников вариантов будет  $2025 * 2023 * 2021 * \dots * 5 * 3 * 1$

**Критерии.** Задача полностью решена - 7 баллов. Есть начальные продвижения в решении - 1 балл

## ЗАДАЧА 5

5. УСЛОВИЕ. Определить  $m$ , при которых уравнение относительно  $x$

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

имеет четыре действительных корня, являющиеся членами арифметической прогрессии.

5. РЕШЕНИЕ. Если некоторые  $a$  и  $-a$  корни, то прогрессия будет иметь вид

$$-3a, -a, a, 3a.$$

Следовательно

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим равенства:

$$10a^2 = 3m + 2,$$

$$9a^4 = m^2.$$

Исключение  $a$  дает  $19m^2 - 108m - 36 = 0$ . Следовательно  $m_1 = 6$ ,  $m_2 = -6/19$

**Критерии.** Задача полностью решена - 7 баллов. Найдено одно значение  $m$ , при котором корни образуют арифметическую прогрессию - 3 балла