

11 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. Найдите все такие целые положительные числа n , у которых есть два таких различных делителя s и t , что $s < t$ и $t - n/3 = n/3 - s$.

Ответ: все целые положительные числа, кратные шести.

Решение. Так как 1, 2, 3 - три наименьших натуральных числа и $t > n/3 > s$, то $t = n/2$ или $t = n$. Так как $n - n/3 > n/3 - 1$, то $t = n$ - не подходит. Тогда $t = n/2$ и $n/3 - s = n/2 - n/3 = n/6$, откуда $s = n/6$. Поэтому искомыми целыми положительными числами будут все кратные шести числа, и только они.

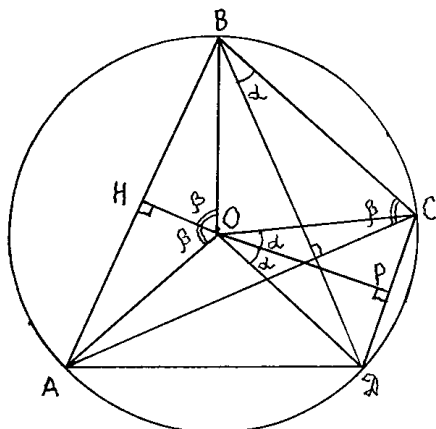
Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

Показано, все целые положительные числа, кратные шести, подходят – 3 балла.

11.2. Натуральные числа a, b, c такие, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ и $1/a + 1/b = 1/c$. Докажите, что $a + b = t^2$ для некоторого натурального числа t .

Решение. Докажем, что $a + b = t^2$, где $t = \text{НОД}(a, b)$. Пусть $a = a_1 \cdot t$, $b = b_1 \cdot t$, где a_1 и b_1 - взаимно простые. Условие $1/a + 1/b = 1/c$ перепишем в виде $(a+b)c = ab$ или $(a_1+b_1)c = a_1b_1t$. Так как $\text{НОД}(a_1+b_1, a_1b_1) = 1$ и $\text{НОД}(t, c) = 1$, то из уравнения $(a_1+b_1)c = a_1b_1t$ получаем, что или $a_1+b_1 = st$, где s - натуральное число и $a_1b_1 = sc$, или $m(a_1+b_1) = t$ и $ma_1b_1 = c$. Если в первом случае $s > 1$, то $\text{НОД}(a_1+b_1, a_1b_1) \geq s > 1$. Противоречие. Если во втором случае $m > 1$, то $\text{НОД}(t, c) \geq m > 1$. Противоречие. Значит, в обоих случаях $a_1+b_1 = t$ и $a+b = t^2$.

Комментарии. Оценивается по общим критериям.



11.3. Диагонали AC и BD вписанного в окружность с центром O четырёхугольника ABCD перпендикулярны. Докажите, что сторона CD вдвое больше расстояния от точки O до стороны AB.

Решение. Опустим из центра O окружности перпендикуляры OH и OP на стороны AB и CD соответственно. Тогда $\angle COP = \angle DOP = \angle CBD = \alpha$ и $\angle AOH = \angle BOH = \angle BCA = \beta$, причём $\alpha + \beta = 90^\circ$. Прямоугольные треугольники OAH и OPC равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $2OH = 2PC = CD$.

Комментарии. Оценивается по общим критериям.

11.4. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий неравенству $f(x) \geq -9/10$ при любом x . Докажите, что $f(x) \geq -1/4$ при любом x .

Решение. Так как наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + ax + b$ достигается при $x = -a/2$, то $4b - a^2 \geq -3,6$. Так как a, b - целые числа, то $4b - a^2 \geq -3$. Уравнения $4b - a^2 = -3$ и $4b - a^2 = -2$ не имеют решений, так квадрат целого числа не может давать остатки 2 или 3 при делении на 4. Следовательно, $4b - a^2 \geq -1$. Значит, $f(x) \geq b - a^2/4 \geq -1/4$ при любом x .

Комментарии. Доказано, что $4b - a^2 \geq -3$ – 2 балла.

11.5. Дано множество A из 100 натуральных чисел, каждое из которых не меньше 1 и не больше 6, и натуральное число $t \leq 100$. За один ход можно выбрать произвольные t чисел из A и увеличить на 1 каждое из них, если оно меньше 6, а каждое число, равное 6, заменить на 1. Найдите все значения t , для которых при любом множестве A найдётся такая конечная последовательность ходов, что в результате каждое из чисел станет равным 6.

Ответ: $t = 6k - 5$, $k = 1, 2, \dots, 17$ и $t = 6l - 1$, $l = 1, 2, \dots, 16$.

Решение. Предположим, что t - чётное число. Тогда после хода чётность суммы всех чисел не меняется. Пусть в множестве A находятся числа 1, 6, 6, ..., 6. Если при очередном ходе в наборе из t чисел проводим операцию для k чисел меньших 6 и для $t - k$ чисел, равных 6, то к исходной сумме из t чисел прибавляется число $k - 5(t - k) = 6k - 5t$, которое делится на 2, поэтому получить набор из всех чисел, равных 6, нельзя. Пусть теперь t - нечётное число, кратное 3. Тогда если при очередном ходе в наборе из t чисел проводим операцию для k чисел меньших 6 и для $t - k$ чисел, равных 6, то к исходной сумме из t чисел прибавляется число $k - 5(t - k) = 6k - 5t$, которое делится на 3, поэтому и в этом случае из набора 1, 6, 6, ..., 6 все числа, равные 6, получить нельзя. Пусть теперь t - любое число вида $6k - 5$ или $6l - 1$. Выбирая из множества A t чисел, не равных 6 (если они есть) за несколько ходов среди них можно получить хотя бы одно, равное 6. Продолжая действовать таким образом, всегда можно получить, не менее $101 - t$ чисел, равных 6. Покажем, что из оставшихся не более $t - 1$ чисел, не равных 6, можно выбрать любое число и через несколько ходов увеличить его значение на 1, не изменяя остальных чисел. Пусть x - выбранное число. Добавим к числу x еще любые t чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$. Рассмотрим два случая.

1) $t = 6k - 5$. Первым ходом изменим значения чисел $x, a_2, \dots, a_t$, вторым ходом изменим числа $x, a_1, a_3, \dots, a_t$ и т.д. За последний ход изменим числа $x, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}$. В результате каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ изменилось $t - 1 = 6k - 6$ раз, а значит, значение каждого из этих чисел оказалось равным исходному. Число x изменилось t раз, т.е. увеличилось на 1.

2) $t = 6l - 1$. За первые 5 ходов изменим значения чисел $x, a_2, \dots, a_t$, за следующие 5 ходов изменим числа $x, a_1, a_3, \dots, a_t$ и т.д. За последние 5 ходов этого вида изменим числа $x, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}$. Теперь для чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ сделаем 4 хода. В результате каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_t$ изменилось $5(t - 1) + 4 = 30l - 6$ раз, а значит, значение каждого из этих чисел оказалось равным исходному. Число x изменилось $5t = 30l - 5$ раз, т.е. увеличилось на 1. Добавляя по очереди таким способом 1 к числам, не равным 6, можно получить все числа, равные 6.

Комментарии. Из 7 баллов 1 балл даётся за обоснование того, что t - нечётно; 1 балл даётся за обоснование того, что t не делится на 3; 2 балла даётся за обоснование того, что все числа вида $t = 6k - 5$ подходят; 2 балла даётся за обоснование того, что все числа вида $t = 6l - 1$ подходят; 1 балл даётся за правильный ответ.