

11 класс

1. Решите неравенство $x^4 + 2x^2 - x + 5 < 0$.

Решение

$x^4 + 2x^2 - x + 5 = x^4 + x^2 + (x^2 - x + 0,25) + 4,75 = x^4 + x^2 + (x - 0,5)^2 + 4,75 > 0$ при любом x . Значит, неравенство не имеет решения.

Критерии

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

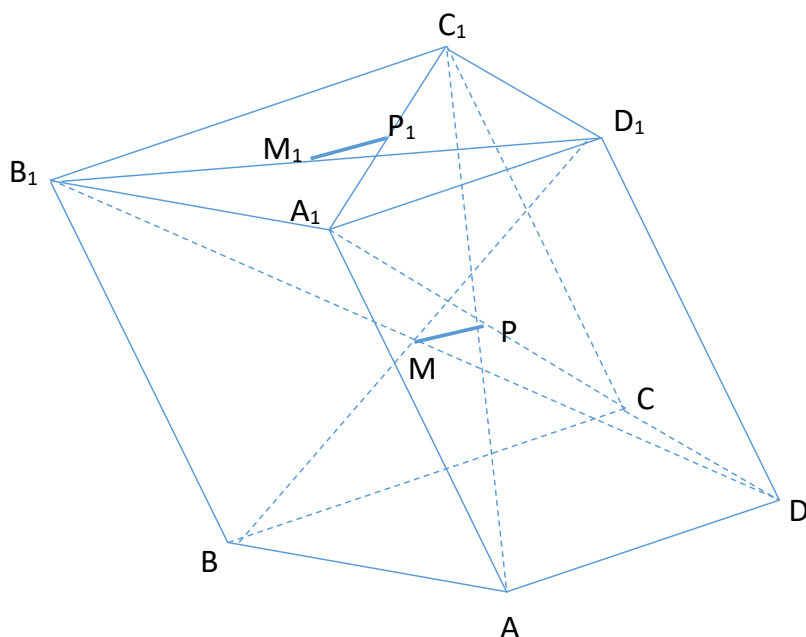
Допущена вычислительная ошибка, рекомендуется снять 1 балл.

Если допущена ошибка в использовании формулы – не более 3-х баллов за всю задачу.

2. Доказать, что расстояние между точками пересечения диагоналей четырехугольной призмы равно расстоянию между серединами диагоналей одного из оснований.

Решение

1. Так как диагонали призмы являются диагоналями сечений ABC_1D_1 и



A_1B_1CD , представляющих собой параллелограммы, то они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

2. Отрезок PP_1 - средняя линия треугольника AA_1C_1 ,
 $PP_1 = 0,5 AA_1$

3. Отрезок MM_1 - средняя линия треугольника B_1D_1D ,
 $MM_1 = 0,5 AA_1$

Из пунктов 2 и 3 следует, что четырехугольник M_1P_1PM – параллелограмм и $M_1P_1 = MP$.

Все шаги доказательства выполнены верно и обоснованно – 7 баллов.

Доказательство в целом верное, но имеются незначительные неточности в рассуждениях и обоснованиях – 6 баллов.

Доказательство выполнено по чертежу, на котором изображена прямая призма, но в записях и рассуждениях это не фигурирует, то баллы не снимать. Доказательство проведено с использованием условия, что призма прямая – не выше 4 баллов.

Замечено, что MM_1 и PP_1 - средние линии треугольников B_1D_1D и AA_1C_1 , но дальнейших продвижений нет – 3 балла.

3. Из 100 одинаковых квадратов со стороной 1 составили плоскую фигуру (не обязательно выпуклый многоугольник). У каждого квадрата есть хотя бы один соседний квадрат, с которым он имеет общую сторону. Любые два квадрата либо имеют общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют ни общих сторон, ни общих вершин. Наложения квадратов друг на друга нет. Какой наибольший периметр у этой фигуры мог получиться?

Решение Способ 1. Оценка. Рассмотрим граф, вершины которого – квадраты, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие квадраты имеют общую сторону. Этот граф должен быть связным, имеет 10 вершин, а значит, не менее $10-1=9$ ребер. Значит, $99 \times 2 = 198$ сторон у квадратов являются соседними. А всего у 100 квадратов 400 сторон. Поэтому $400 - 198 = 202$ стороны будут учитываться в периметре. Наибольший периметр – 202.

Пример. Полоска 1×100 .

Способ 2. Оценка. Всего у 100 квадратов 400 сторон. Пусть эти квадраты образуют фигуру. Стороны этих квадратов разбиваются на 2 группы: соседние (к стороне квадрата прилежит сторона другого квадрата) и не соседние (не соседние стороны учитываются в периметре).

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.

5. Имеется 100 различных натуральных чисел (натуральный ряд начинается с 1). Известно, что сумма любых 10 из них не превосходит 995. Найдите наибольшую сумму всех 100 чисел.

Решение

1) Упорядочим числа по возрастанию.

Тогда наибольшее значение числа на 91-м месте равно 95, так как $95 + 96 + \dots + 104 = 995$ (максимально допустимая по условию), иначе сумма последних 10 чисел не меньше, чем $96 + 97 + \dots + 105 = 1005$, что больше 995.

2) Максимально возможная сумма первых 90 чисел равна $94 + 93 + \dots + 5 = 3455$.

3) Тогда наибольшая сумма всех чисел $3455 + 995 = 4450$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов.

Верное решение, но отсутствует обоснование «наибольшее значение числа на 91 месте равно 95», и этот факт используется в решении – 5 баллов.

Верный ответ и только приведен верный пример – 0 баллов.

При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка (например, неверно найдена сумма $94 + 93 + \dots + 5$), не влияющая на ход рассуждений, в результате чего получен неверный ответ – решение оценивается в 6 баллов.

Верный ответ и выполнен полный перебор (при решении методом перебора) – 7 баллов.

Верное, полное и обоснованное решение – 7 баллов.