

**Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025-2026 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе**

Теоретический тур

11 класс

Максимальное количество баллов - 35.

Время выполнения - 235 минут.

Краткая инструкция.

Все олимпиадные задания выполняются письменно. Желательно пользоваться ручками с чернилами синего цвета. Чертежи производить желательно ручкой (сначала возможно использовать карандаш, но потом чертеж обвести ручкой).

Разрешается использовать чертёжные принадлежности (линейка, циркуль, ластик) для выполнения заданий.

Участник олимпиады на выданном бланке ответов записывает подробные решения задач, указывая соответствующий номер задачи. Переписывать формулировки заданий не обязательно. Предварительные вычисления можно делать на выданных дополнительных листах (черновиках).

При выполнении заданий не допускается использование справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

После завершения работы все бумаги должны быть сданы организаторам олимпиады, включая черновики.

Решения задач, критерии оценивания

1. Необходимо перевезти с предприятия 84 железобетонных плиты по 3,8 т и 38 плит по 4,6 т. Для транспортировки плит используют шаланды (тралы), в которые можно погрузить груз до 28 т. Какое наименьшее количество шаланд потребуется, чтобы вывезти все плиты?

Ответ: 18 шаланд.

Решение. В одну шаланду нельзя погрузить 8 плит даже по 3,8 т ($3,8 \cdot 7 = 26,6$, $3,8 \cdot 8 = 30,4$), по 4,6 т можно погрузить максимум 6 плит ($3,8 \cdot 6 = 27,6$). Всего плит 122, поэтому минимум потребуется $122/7 \approx 17,4$ шаланд, а точнее 18.

Пример: покажем, что 18 шаланд хватит.

В каждую из 14 шаланд погружаем 6 плит по 3,8 т и 1 плиту по 4,6 т (всего 27,4 т), получаем 84 плиты по 3,8 т и 14 плит по 4,6 т.

В каждую из 4 шаланд погружаем 6 плит по 4,6 т (27,6 т), получаем 24 плиты по 4,6 т.

Комментарий. Верное обоснованное решение с оценкой и примером – 7 баллов. Найдено верное количество шаланд и доказана минимальность без примера – 4 балла. Предложен только пример распределения плит по 18 шаландам – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.

2. Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению $3\sin^3 x - \sin x \cdot \sin 2x - \cos^3 x = 0$. Найти углы треугольника.

Ответ: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Решение. Заменяем $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, делим на $\sin^3 x$, заменяем $\cos x / \sin x = \operatorname{ctg} x$, получаем уравнение $\operatorname{ctg}^3 x + 2\operatorname{ctg} x - 3 = 0$. Действительный корень $\operatorname{ctg} x = 1$. Так как x – угол прямоугольного треугольника, то $x = 45^\circ$.

Комментарий. Верное полное решение – 7 баллов. Решено уравнение в общем виде, но не найдены углы треугольника – 4 балла. В решении уравнения есть нужные продвижения, но решение не доведено до конца – 1-2 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. В классе из 25 человек 10 учеников дружат ровно с пятью одноклассниками, 15 учеников дружат ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все трое дружат друг с другом, либо каждый ни с кем не дружит.

Ответ: 1225.

Решение. Общее число троек учеников равно $C_{25}^3 = \frac{25!}{22!3!} = 2300$. Вычислим все неподходящие тройки, в которых не все три ученика дружат друг с другом, но какие-то двое обязательно дружат. Пусть (x, y, z) – такая неподходящая тройка, тогда в ней есть ровно два ученика, каждый из которых дружит ровно с одним из оставшихся: x дружит с y и z дружит с y ; либо x и y дружат, а z ни с кем не дружит. Для подсчета неподходящих троек подсчитаем количество таких учеников во всех неподходящих тройках и разделим на два, так как таких учеников входит по два в каждую неподходящую тройку.

Пусть ученик из 10 человек, который дружит с пятью одноклассниками. Он дружит с пятью и не дружит с $25 - 5 - 1 = 19$ учениками, значит неподходящих троек с его участием равно $19 \cdot 5 = 95$.

Пусть ученик из 15 человек, который дружит с четырьмя одноклассниками. Тогда неподходящих троек с его участием равно $20 \cdot 4 = 80$.

Всего неподходящих троек равно $(10 \cdot 95 + 15 \cdot 80) / 2 = 1075$. А количество подходящих троек равно $2300 - 1075 = 1225$.

Комментарий. Верное полное решение – 7 баллов. При верном решении ответ неверный из-за ошибки в вычислениях – 4 балла. Решение верно начато,

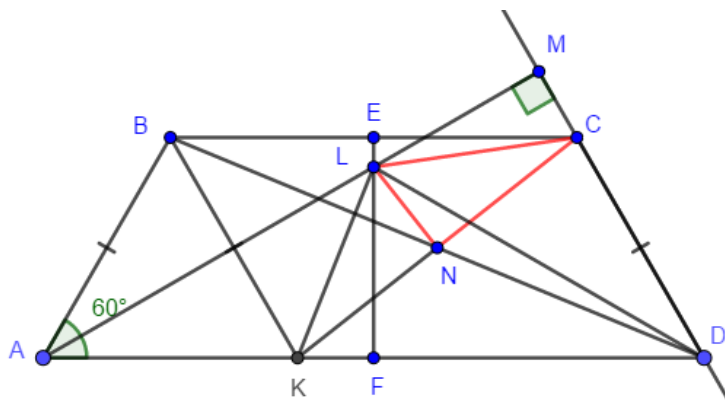
используя правила комбинаторики, но не завершено - 1-3 баллов. Найдено общее число троек – 1 балл. Только рассмотрены частные случаи дружбы – 0 баллов. Только ответ - 0 баллов.

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$, в которой углы при основании с вершинами A и D равны 60° провели высоту AM к боковой стороне CD и отрезок EF , соединяющий середины оснований. Точка N – середина диагонали BD , точка L – пересечение высоты AM и отрезка EF . Найдите углы треугольника CLN .

Ответ. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Решение.

Возьмём на основании AD такую точку K , что $BK \parallel CD$, тогда $BCDK$ – параллелограмм. Докажем, что треугольники ALK и DLC равны по двум сторонам и углу между ними. Треугольник ABK равнобедренный, отсюда



$AK=AB=CD$. Точка L лежит на средней линии к основаниям трапеции, значит $AL=DL$. В прямоугольном треугольнике AMD $\angle ADM = 60^\circ$, $\angle DAM = 30^\circ$. Так как $\angle LAK = \angle MAD = 30^\circ = \angle ADL$, то $\angle LDC = 60^\circ - \angle ADL = 30^\circ$.

Из равенства треугольников следует, что $\angle ALK = \angle DLC$, $LK = LC$ и значит треугольник KLC равнобедренный.

Диагонали параллелограмма $BCDK$ делятся точкой пересечения пополам, по условию точка N – середина BD , значит, LN – медиана равнобедренного треугольника KLC , то есть является и высотой. Таким образом, $\angle LNC = 90^\circ$. Так как LN – биссектриса $\angle KLC$, то $\angle NLC = 1/2 \angle KLC$.

Так как $\angle KLC = \angle KLD + \angle DLC$, $\angle ALD = 120^\circ = \angle ALK + \angle KLD$ и $\angle DLC = \angle ALK$, то $\angle KLC = \angle ALD = 120^\circ$. Тогда $\angle NLC = 1/2 \angle KLC = 60^\circ$, а $\angle LCN = 30^\circ$.

Комментарий. Верное полное решение – 7 баллов. В решении есть верные продвижения, но решение не доведено до конца – 1-4 баллов. Только ответ без обоснований - 0 баллов. Неверное решение – 0 баллов.

5. В укромном месте Багдадского рынка Али-баба менял 21 золотой слиток на золотые монеты. Слитки были весом 101 г, 102 г, 103 г, ..., 121 г. У Али-бабы были только чашечные весы без делений. Покупатели просили доказать, что слитки весят ровно столько, сколько им объявлено. Али-баба попросил мальчика сбегать к торговцам на рынке и принести гири для взвешивания. Какое число гирь и каким весом достаточно принести мальчику, чтобы определить веса слитков на чашечных весах? Число взвешиваний может быть

сколь угодно большим, веса гирь считаются достоверными, на чаши весов можно класть и слитки, и гири.

Ответ. Одна гиря весом 1 г.

Решение. Заметим, что вообще без гирь обойтись не удастся, поскольку если вес каждого слитка уменьшить в два раза, то результаты всех взвешиваний не изменятся. Покажем, что Али-баба сможет управиться с помощью одной гири весом в 1 г. Сначала он убедит покупателей, что слитки весят n , $(n + 1)$, $\dots$, $(n + 21)$ г. Для этого он положит на одну чашу весов слиток массой 102 г., а на другую чашу – слиток массой 101 г. и гирю. Весы покажут равенство, и покупатели узнают, что взвешенные слитки отличаются ровно на один грамм. Затем тоже самое нужно сделать со слитками весом 103 и 102 г и т.д. Наконец, с помощью последнего взвешивания Али-баба покажет покупателям, чему равно n . Для этого он положит на одну чашу весов слитки весом от 101 до 111 г., а на другую – остальные слитки и гирю. Весы вновь покажут равенство. Таким образом, получаем $n + (n + 1) + \dots + (n + 10) = (n + 11) + (n + 12) + \dots + (n + 20) + 1$. Поэтому, $11n + 55 = 10n + 155 + 1$, т.е. $n = 101$.

Комментарий. Верное полное решение с доказательством минимальности и примером взвешивания – 7 баллов. Приведен пример взвешивания с одной гирей в 1 г, но не доказана минимальность – 4 балла. Доказано, что минимум одна гиря нужна весом 1 г - 3 балла, если вес не указан, то – 2 балла. Только ответ - 0 баллов. Неверный ответ и решение – 0 баллов.