

**Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2025-2026 учебном году**

11 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

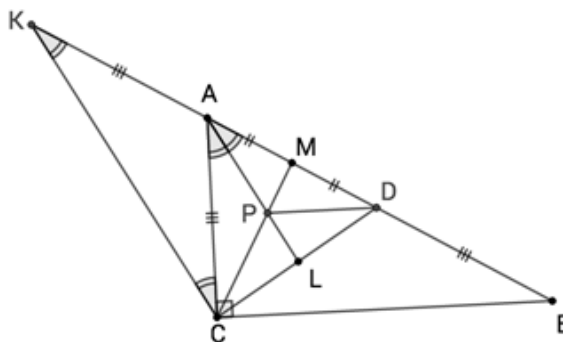
1. По кругу стоят несколько человек. Каждый из них сказал: «Один из моих соседей тяжелее меня, а другой – легче меня». Известно, что веса любых двух людей различны. Могло ли случиться, что среди стоящих солгали ровно 2025 человек?

Решение. Лжецы, очевидно, те, у кого оба соседа легче них (назовем таких лжецов *толстыми*), или оба соседа тяжелее них (назовем таких лжецов *тонкими*). Если двигаться по кругу, начиная с тонкого лжеца, то веса людей будут расти до следующего лжеца, и этот лжец, очевидно, будет толстым. Аналогично, если начать двигаться с толстого лжеца, то веса людей до следующего лжеца будут убывать, и этот следующий лжец будет тонким. Таким образом, толстые и тонкие лжецы в круге чередуются, поэтому их должно быть поровну, а всех лжецов вместе – четное число. Но 2025 – число нечетное, т.е. ситуация невозможна.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = AC$. Докажите, что в треугольнике ACD биссектриса AL , медиана CM и высота DH пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть AL и CM пересекаются в точке P (см. рисунок). Тогда утверждение задачи сводится к доказательству того, что DH проходит через точку P .



На продолжении гипотенузы AB отметим точку K так, чтобы $AK = BD = AC$. Тогда AP – биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника CAK , следовательно, $AP \parallel KC$. Тогда по теореме Фалеса: $MP : PC = MA : AK$.

Учитывая, что $MA = MD$ и $AK = BD$, получим: $MP : PC = MD : DB$, значит – $DP \parallel BC$. Так как BC перпендикулярно AC , то DP перпендикулярно AC , то есть DH проходит через точку P , что и требовалось.

Комментарий. Предложено достроение по симметрии – 1 балл.

3. На горизонтальной прямой находится робот, который управляется буквами русского алфавита. Если на вход робота поступает гласная буква и ей предшествовала согласная буква, то робот смещается на 77 метров вправо. Если на вход робота поступает согласная буква и ей предшествовала гласная буква, то робот смещается на 11 метров влево. Если на вход робота поступает гласная буква, которой предшествовала гласная буква, или согласная буква, которой предшествовала согласная буква, то робот смещается на 33 метра вправо. При поступлении первой буквы робот не двигается. На каком расстоянии от начальной точки окажется робот после того, как на его вход поступят (в алфавитном

порядке) все буквы русского алфавита, кроме мягкого и твердого знаков?

(Всего в русском алфавите 33 буквы.)

Ответ: в результате робот сместится на 990 метров.

Решение. В русском алфавите 33 буквы. После удаления мягкого и твердого знака остается 31 буква. Соответственно, всего робот сделает 30 ходов. Первая и последняя буквы русского алфавита гласные (А и Я). Поэтому количество переходов гласная / согласная равно количеству переходов согласная / гласная. Обозначим это количество k . Тогда общее количество переходов гласная / гласная и согласная / согласная равно $(30 - 2k)$. Теперь мы можем найти результирующее смещение робота:

$$S = 77k + (-11)k + (30 - 2k) \cdot 33 = 990$$

Замечание. В данной задаче ответ не зависит ни от количества гласных букв в русском алфавите (оно равно 10), ни от точного значения k (оно равно 5).

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.

4. У квадратных трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ выписали на доску все корни. Оказалось, что выписано ровно 3 различных числа. Докажите, что у какого-то из трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ или $f(x)+g(x)$ ровно один корень.

Решение. Предположим, что ни у одного из этих трёхчленов нет ровно одного корня. Тогда у каждого из них чётное количество корней, поэтому чтобы получить ровно 3 различных числа, некоторые корни должны совпасть. Заметим, что если у каких-то двух из этих трёхчленов совпадает корень x_0 , то x_0 также будет и корнем третьего многочлена. Тогда у каждого многочлена есть ещё ровно по одному корню — назовём их x_1 , x_2 , x_3 . При этом ни одно из чисел x_1 , x_2 , x_3 не равно x_0 , так как иначе какой-то из трёхчленов имел бы один корень. Если никакие из чисел x_1 , x_2 , x_3 не совпадают, то всего выписано 4 различных числа. Если же какие-то два совпадут, то совпадёт и третье, и тогда различных чисел будет 2. Противоречие.

Комментарий. Сформулирована идея о том, что «если у каких-то двух из этих трёхчленов совпадает корень x_0 , то x_0 также будет и корнем третьего

многочлена» – 2 балла.

5. Докажите, что для неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \leq 2n!$$

Решение. Заметим, что если

$$x_1 = 1, \text{ а } x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0,$$

то неравенство обращается в равенство. Предположим, что в исходном наборе $x_1 \neq 1$. Тогда найдётся такое $k \neq 1$, что $x_k > 0$.

Рассмотрим новый набор $y_1, y_2, \dots, y_n$, в котором $y_i = x_i$ для всех i кроме 1 и k , $y_1 = x_1 + x_k$, а $y_k = 0$. Заметим, что сумма чисел этого набора равна 1 и

$$(1 + y_1)(2 + y_2) \dots (n + y_n) = (1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \cdot \frac{(1 + x_1 + x_k) \cdot k}{(1 + x_1)(k + x_k)}$$

Докажем неравенство

$$\frac{(1 + x_1 + x_k) \cdot k}{(1 + x_1)(k + x_k)} > 1,$$

которое равносильно неравенству $(1 + x_1 + x_k) \cdot k > (1 + x_1)(k + x_k)$.

Действительно,

$$(1 + x_1 + x_k) \cdot k \geq k + kx_1 + 2x_k > k + kx_1 + (1 + x_1)x_k = (1 + x_1)(k + x_k)$$

Тут мы воспользовались сначала тем, что $k \geq 2$, а потом тем, что $x_1 < 1$. Таким образом, при переходе к новому набору значение произведения

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n)$$

увеличивается. При этом количество нулей в наборе увеличилось хотя бы на 1. Повторяя аналогичные действия, в какой-то момент мы перейдём к набору, в котором $x_1 = 1$, а все остальные $x_i = 0$, для которого выполнено равенство. Таким образом, изначальное неравенство было верно.

Комментарий. Построена оценка значения произведения при переходе к более объёмному набору чисел от меньшего – 3 балла.