

11 класс. Решения

Верные решения оцениваются в 7 баллов.

1. Даны натуральные числа n и m и функция $f(x) = \frac{x^2 - x}{2}$. Докажите, что существует такое натуральное число k , что

$$f(n) + f(m) + nm = f(k).$$

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} f(n) + f(m) + nm &= \frac{n^2 - n}{2} + \frac{m^2 - m}{2} + nm = \\ &= \frac{n^2 + 2nm + m^2 - n - m}{2} = \frac{(n + m)^2 - (n + m)}{2} = f(n + m). \end{aligned}$$

То есть в качестве k подойдет $n + m$.

2. Автомат расфасовал 2026 конфет по 1000 коробкам (коробки могут быть пустыми). Конфеты были двух типов: шоколадные и мармеладные. Известно, что если в коробке есть шоколадная конфета, то там не больше одной мармеладной, а если в коробке есть мармеладная конфета, то там не больше одной шоколадной. Докажите, что есть коробка, в которой все конфеты одного типа.

Решение. Предположим, что не существует коробки, в которой все конфеты одного типа. Тогда каждая коробка или пустая, или в ней не более одной мармеладной и не более одной шоколадной конфеты (иначе, одно из условий будет не выполнено). Следовательно, в каждой коробке не более двух конфет, а в 1000 коробках не более 2000 конфет. Но конфет 2026, противоречие. Значит, такая коробка существует.

Критерии.

• Замечено, что если в коробке есть конфеты каждого из типов, то в этой коробке ровно 2 конфеты — 2 балла.

3. Существуют ли такие пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e , что среди дробей $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{d}, \frac{c}{e}, \frac{d}{e}$ четыре сократимы, а шесть несократимы?

Ответ. Существуют. **Решение.** Например, подойдет такой набор различных чисел: $a = 6$, $b = 2^2$, $c = 2^3$, $d = 3$, $e = 5$. Нетрудно убедиться, что четыре дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{d}$ сократимы, а все остальные шесть дробей несократимы.

Критерии.

- Неправильный пример — 0 баллов.

4. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Обозначим через T середину дуги BC описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что $AB = AP$. Докажите, что прямые TP и AD перпендикулярны.

Решение. Из равнобедренности треугольника ABP и вписанности четырёхугольника $ABCD$ получаем, что $\angle DCP = \angle ABP = \angle APB = \angle CPD$, то есть треугольник DCP равнобедренный. Так как T середина дуги BC , то AT и DT являются биссектрисами углов BAP и CDP соответственно. В равнобедренном треугольнике биссектрисы являются высотами. Следовательно, $AT \perp BP$ и $DT \perp CP$. То есть AP и DP являются высотами в треугольнике ATD . А значит, TP тоже является высотой, откуда $TP \perp AD$.

Критерии. Следующие критерии суммируются.

- Доказано, что треугольник DCP равнобедренный — 1 балл.
- Доказано, что $AT \perp BP$ — 2 балла.

5. В текстовом редакторе доступны лишь 13 букв. Любая последовательность букв является словом, каждое слово либо красивое, либо некрасивое. Известно, что для каждого натурального n в библиотеке слов редактора имеется ровно шесть n -буквенных некрасивых слов. Докажите, что в этом текстовом редакторе можно написать красивое слово из 2025 букв так, что, где бы ни поставить пробел, получатся два красивых слова.

Решение. Покажем явно, как построить требуемое слово. Для каждого $1 \leq i \leq 2025$ поставим на i -ю позицию букву, которая не является ни последней для некрасивого слова длины i , ни первой для некрасивого слова длины $n + 1 - i$. Такая буква существует, так как есть ровно 6 некрасивых слов длины i и ровно 6 некрасивых слов длины $n + 1 - i$, а всего букв в алфавите 13. Полученное слово удовлетворяет условию, так как оно красивое, и по построению для любого $1 \leq i \leq 2025$ слово с 1 символа до i красивое, а также слово с $i + 1$ символа до последнего тоже красивое.