

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
11 класс

Задача 11.1

Условие:

В шахматном турнире участвовало 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места? Выигрыш оценивается в 1 балл, проигрыш – 0 баллов, ничья – 0,5 баллов каждому.

Ответ: Шахматист,
занявший третье место,
выиграл у шахматиста,
занявшего седьмое место.

Решение:

Обозначим буквами $x_1, x_2, \dots, x_8$ количества очков, набранных шахматистами, занявшими 1-е, 2-е, ... 8-е места соответственно. Согласно условию, справедливы неравенства:

$$7 \geq x_1 > x_2 > \dots > x_8,$$

и, кроме того,

$$x_2 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8.$$

Шахматисты, занявшие последние 4 места, сыграли между собой $3 + 2 + 1 = 6$ партий и, значит, разделили между собой положительные за эти партии 6 очков. Таким образом,

Из неравенства $7 \geq x_1 > x_2 \geq 6$ следует, что $x_2 = 6$. Действительно, если второй игрок проиграл первому, он не мог набрать более 6 очков и, значит, $x_2 = 6$. Если же партия между ними закончилась иначе, то первый игрок набрал не более 6,5 очков, и из неравенств $6,5 \geq x_1 > x_2 \geq 6$ опять следует, что $x_2 = 6$. Итак, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 6$

Полученное равенство означает, что каждый из последних четырех участников турнира проиграл каждому из четырех лучших. В частности, шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.

Задача 11.2

Условие:

Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом, прочитав каточку $(a; b)$, выдает

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
11 класс

новую карточку $(a + 1, b + 1)$, второй, прочитав $(a; b)$, выдает карточку $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ (он работает только при четных a и b), третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$, выдает карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки. Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку: $(1; 50)$?

Ответ: можно

Решение:

Действие автоматов I, II, III будем обозначать стрелками с указанием номера автоматов, например:

$(a; b)$

$$\xrightarrow{\text{I}} (a + 1; b + 1); \quad (2a; 2b) \xrightarrow{\text{II}} (a; b); \quad (a; b), (b; c) \xrightarrow{\text{III}} (a; c).$$

а) 1) из карточки $(5; 19)$ можно получить карточку $(1; 50)$, например, следующим образом

$$\begin{aligned} & 1) \quad (5; 19) \xrightarrow{\text{I}} (6; 20) \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (19; 33), \\ & \quad (5; 19), (19; 33) \\ & \xrightarrow{\text{III}} (5; 33) \xrightarrow{\text{I}} (6; 34) \xrightarrow{\text{II}} (3; 17) \xrightarrow{\text{I}} (4; 18) \xrightarrow{\text{II}} (2; 9); \\ & 2) \quad (2; 9) \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (9; 16), \\ & \quad (2; 9), (9; 16) \xrightarrow{\text{III}} (2; 16) \xrightarrow{\text{II}} (1; 8); \\ & 3) \quad (1; 8) \\ & \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (8; 15) \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (15; 22) \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (22; 29) \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (29; 36) \xrightarrow{\text{I}} \dots \\ & \quad \dots \xrightarrow{\text{I}} (36; 43) \xrightarrow{\text{I}} \dots \xrightarrow{\text{I}} (43; 50); \\ & 4) \quad (1; 8), (8; 15) \\ & \xrightarrow{\text{III}} (1; 15), (1; 15), (15; 22) \xrightarrow{\text{III}} (1; 22), (1; 22), (22; 29) \xrightarrow{\text{III}} \\ & \quad (1; 29), (1; 29), (29; 36) \\ & \xrightarrow{\text{III}} (1; 36), (1; 36), (36; 43) \xrightarrow{\text{III}} (1; 43), (1; 43), \\ & \quad (43; 50) \xrightarrow{\text{III}} (1; 50). \end{aligned}$$

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
11 класс

Задача 11.3

Условие:

Решим в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3, \\ xt + yz = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1;0;3;1), (−1;0;−3;−1), (3;1;1;0), (−3;−1;−1;0).

Решение:

Из системы получаем:

$$(xz - 2yt)^2 + 2(xt + yz)^2 = (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11.$$

Отсюда следует, что либо $x^2 + 2y^2 = 1$, либо $z^2 + 2t^2 = 1$.

В первом случае $x = \pm 1$; $y = 0$, и тогда из системы находим:

$$t = \pm 1; z = \pm 3.$$

Во втором случае $z = \pm 1$; $t = 0$, и тогда из системы находим:

$$x = \pm 3; y = \pm 1.$$

Дополнительные критерии:

Полный ответ без решения – 26

Хотя бы одна четверка указана – 16

Задача 11.4

Условие:

У Виктора восемь палочек, длина каждой из них не менее 100 мм и не более 2025 мм. Обязательно ли найдутся среди них три палочки, из которых можно составить треугольник?

Ответ. Да, всегда.

Решение:

Предположим противное: любая тройка палочек не образует треугольник, следовательно, длины любых трех палочек не удовлетворяют неравенству треугольника. В этом случае в любой тройке длина самой длинной палочки не менее суммы длин двух других палочек этой тройки. Пусть длины палочек, записанные в порядке неубывания в мм:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$

Тогда предположение выполняется, если выполняются неравенства:

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
11 класс

$$a_1 \geq 100, a_2 \geq 100, a_3 \geq 200, a_4 \geq 300, a_5 \geq 500, a_6 \geq 800, a_7 \geq 1300, a_8 \geq 2100.$$

Таким образом, длина самой длинной палочки не может быть равна 2025 мм. Получили противоречие, что доказывает, что обязательно найдутся три палочки, из которых можно составить треугольник.

Дополнительные критерии:

Только ответ – 0 баллов

В решении оценены наименьшие длины палочек: 100 мм, 100 мм, 200 мм, 300 мм, 500 мм, 800 мм, 1300 мм, 2100 мм, и тем самым показано, что наименьшая длина самой длинной палочки более 2025 мм – 7 баллов

Задача 11.5

Условие:

В треугольнике ABC угол C – прямой. На стороне AC треугольника отмечена точка M так, что $AM = BC$, на стороне BC – точка N так, что $BN = MC$. Найдите угол между прямыми AN и BM .

Ответ. 45°

Решение:

1 способ (рис. а)

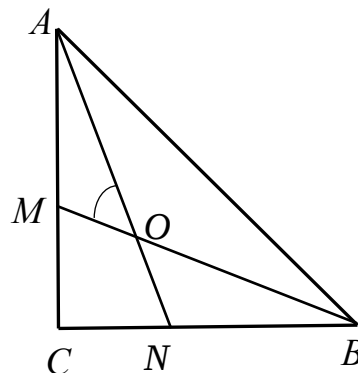
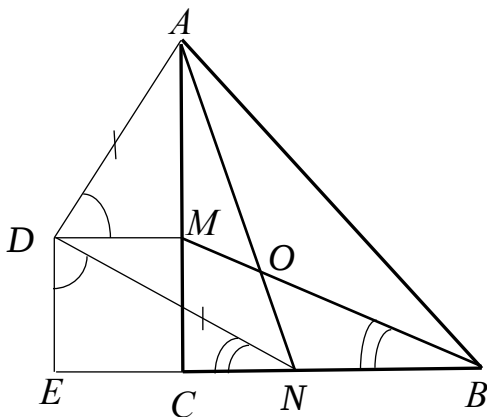
Пусть прямые AN и BM пересекаются в точке O , тогда угол AOM искомый.

Вне треугольника ABC построим квадрат $CEDM$.

Тогда получаем: $EN = CE + CN = CN + CM = CN + NB = CB$.

Значит, прямоугольные треугольники EDN , CMB , MDA равны по двум катетам. Следовательно, $ND = AD$, $\angle EDN = \angle MDA$. Тогда $\angle ADN = \angle MDE = 90^\circ$.

Таким образом, треугольник AND равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle AND = 45^\circ$. Из равенства треугольников следует, что $\angle DNE = \angle MBC$, поэтому BM параллельна ND . Тогда $\angle AOM = \angle AND = 45^\circ$.



Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2025/26 учебный год
11 класс

а)

б)

2 способ (рис. б)

Пусть $x = AM = BC$, $y = BN = MC$, Тогда $AC = x + y$, $CN = x - y$.

Найдем тангенс искомого угла:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle AOM &= \operatorname{tg}(180^\circ - (\angle OAM + \angle AMO)) = -\operatorname{tg}(\angle OAM + \angle AMO) = \\ &= -\frac{\operatorname{tg} \angle OAM + \operatorname{tg} \angle AMO}{1 - \operatorname{tg} \angle OAM \cdot \operatorname{tg} \angle AMO} = -\frac{\operatorname{tg} \angle OAM + (-\operatorname{tg} \angle BMC)}{1 - \operatorname{tg} \angle OAM \cdot \operatorname{tg} \angle AMO} = \\ &= -\frac{\frac{x-y}{x+y} + \frac{-x}{y}}{1 - \frac{x-y}{x+y} \cdot \left(\frac{-x}{y}\right)} = -\frac{xy - y^2 - x^2 - xy}{xy + y^2 + x^2 - xy} = 1 \end{aligned}$$

Следовательно, $\angle AOM = 45^\circ$.

Дополнительные критерии: Только ответ – 0 баллов