

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2025–2026 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ТРЕБОВАНИЯ

Центральной Методической Комиссии всероссийской олимпиады школьников по
математике в 2025/2026 учебном году
по проверке и оцениванию решений заданий муниципального этапа

1. Порядок формирования жюри Олимпиады: из ведущих учителей школ муниципального образования, методистов муниципальных и региональных органов управлений образования, преподавателей, студентов и аспирантов вузов региона.

2. Требования к проверке работ:

Для объективности проведения Олимпиады обязательной является шифровка работ, проводимая членами оргкомитета олимпиады. Решение каждой задачи оценивается Жюри в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен существенный (обычно, более сложный, а не частный) случай, получена основная оценка..
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии верного решения или имеются начальные продвижения..
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Дополнение Региональной Методической Комиссии: максимальная оценка за каждую задачу – 7 баллов, независимо от количества пунктов в ней (таким образом, общая максимальная оценка участника за 5 задач может быть 35 баллов). Если в задаче два пункта, то максимальная оценка за решение лишь одного пункта – 4 балла. Наличие только ответа в задаче без обоснования не оценивается.

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик рассматривается только в случае ошибочного переноса записей из черновика в чистовик; Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты. Недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении; но баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи

Участники школьного этапа олимпиады были вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они обучаются. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

Результаты проверки всех работ участников Олимпиады члены Жюри заносят в итоговую таблицу.

3. Требования к порядку шифрования работ.

Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например 9-01, 9-02, ...) на обложке тетради (на титульном листе) и на первой белой странице тетради (на каждой странице листа чистовика) с последующим снятием обложки (титульного листа) и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется после составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Время выполнения 180 минут. Максимальное количество баллов – 35 баллов.

Максимальный балл за каждую задачу – 7 баллов

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 + xy - 2y^2)(x^2 y^2 - 1) = 0$.

Ответ. Объединение двух прямых $y = x$, $y = -x/2$ и двух гипербол $y = 1/x$, $y = -1/x$.

Решение. Разложим первую скобку на множители, для этого найдем корни данного квадратного трёхчлена переменного x (или дополним до полного квадрата). Тогда получим: $(x - y)(x + 2y)$. Вторую скобку разложим как разность квадратов: $(xy + 1)(xy - 1)$. Таким образом, искомое множество представляет собой объединение двух прямых $y = x$, $y = -x/2$ и двух гипербол $y = 1/x$, $y = -1/x$.

11.2. Даны натуральные числа m и n такие, что $m - n > 1$ и $\text{НОД}(m, n) = 1$. Докажите, что существует такое натуральное k , что $\text{НОД}(m + k, n + k) > 1$.

Решение. Обозначим $d = m - n > 1$. Заметим, что числа $k + m$ и $k + n$ при любом фиксированном k дают одинаковые остатки при делении на d , поскольку их разность постоянна и равна $d = m - n$. При изменении k от 1 до d эти остатки пробегают все возможные d значений. Значит, при некотором k получится нулевой остаток, т.е. оба числа $m + k$ и $n + k$ будут делиться на d , и тем самым, не будут взаимно простыми.

11.3. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{\arcsin x} \cdot \arccos x$.

Ответ. $\sqrt{p^3/54}$. **Решение.** Значения $\arcsin x$ и $\arccos x$ при любом $x \in [-1; 1]$, как известно, связаны соотношением $\arcsin x + \arccos x = p/2$. Таким образом, требуется исследовать функцию $y(t) = \sqrt{t}(p/2 - t)$, где $t = \arcsin x$. Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, область определения $t \in [0; p/2]$. Исследуем $y(t)$ с помощью производной: $y'(t) = (p/2 - t)/(2\sqrt{t}) - \sqrt{t}$. Приравнявая $y'(t) = 0$, находим корень $t = p/6$. При переходе через $p/6$ производная меняет знак с плюса на минус, как следует из полученной формулы для $y'(t)$. Таким образом, $t = p/6$ – точка (единственного) максимума. Соответствующее значение $y(p/6) = \sqrt{p/6}(p/2 - p/6) = \sqrt{p^3/54}$. Для функции $y = \sqrt{\arcsin x} \cdot \arccos x$ соответствующая $t = p/6$ точка максимума $x = 1/2$.

11.4. Рассмотрим множество пифагоровых треугольников, у которых один из катетов равен 2025 (пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами). а) Сколько всего треугольников в этом множестве? (равные треугольники считаются за один). б) Докажите, что в этом множестве есть треугольник, у которого длина гипотенузы – простое число.

Ответ. а) 22. Решение. а) По теореме Пифагора имеем уравнение в целых числах $2025^2 + x^2 = y^2 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 2025^2 = 3^8 \cdot 5^4$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} y - x = d_1 \\ y + x = d_2 \end{cases}$, где $d_1, d_2 = \frac{2025^2}{d_1}$ – пара делителей числа 2025^2 , произведение которых равно 2025^2 . Решение системы $x = (d_2 - d_1)/2$, $y = (d_2 + d_1)/2$ будет целочисленным, т.к. d_1 и d_2 – нечетные числа. Чтобы число x было натуральным, делитель d_2 должен быть больше d_1 , т.е. $d_2 > 2025$, $d_1 < 2025$. Количество всех натуральных делителей числа 2025^2 равно $(8 + 1)(4 + 1) = 45$, как следует из указанного разложения 2025^2 . Из всех делителей 2025^2

только $(45 - 1)/2 = 22$ будет больше 2025 (удалим центральный делитель $d = 2025$, остальные делители делим на пары (d_1, d_2) , где $d_1 \cdot d_2 = 2025^2$, и из каждой пары выбираем $d_2 > d_1$).

б) Требуется доказать, что для некоторой пары делителей d_1, d_2 значение $y = (d_2 + d_1)/2$ будет простым. Все делители 2025^2 имеют вид $3^i \cdot 5^j$, где $0 \leq i \leq 8, 0 \leq j \leq 4$. Поэтому если $y = (d_2 + d_1)/2$ – простое, то могут быть два случая: либо $d_2 = 3^8$ (и тогда $d_1 = 5^4$), либо $d_2 = 3^8 \cdot 5^4$ (и тогда $d_1 = 1$). В первом случае длина гипотенузы $y = (3^8 + 5^4)/2 = 3593$. Это число простое, в чём непосредственно убеждаемся, проверив деление на простые числа до 59 (таких простых «кандидатов» всего 17). Второй катет данного треугольника равен $(3^8 - 5^4)/2 = 2968$.

11.5. Докажите, что $x = 2025$ – единственный корень уравнения в целых числах:

$$[\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x})] + [\lg(\sqrt{x+1000} - \sqrt{x})] = 3,$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a .

Решение. Проверим $x = 2025$. Имеем: $\lg(\sqrt{55^2} + \sqrt{45^2}) + \lg(\sqrt{55^2} - \sqrt{45^2}) = \lg 100 + \lg 10 = 3$. Докажем единственность корня. Если убрать целые части в уравнении, то левая часть будет равна

$$\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x}) + \lg(\sqrt{x+1000} - \sqrt{x}) = \lg((\sqrt{x+1000})^2 - (\sqrt{x})^2) = \lg 1000 = 3.$$

Значит, убрав целые части, мы получили бы тождество. Обозначим $t = \lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x})$, тогда исходное уравнение запишется так: $[t] + [3 - t] = 3 \hat{=} [t] + 3 + [-t] = 3 \hat{=} [-t] = -[t]$. Это равносильно тому, что число t – целое (т.к. в противном случае для положительного $t = n + e$, где $e \in (0; 1)$, получим $[t] = n$, $[-t] = -n - 1$). Таким образом, требуется решить в целых числах x, y уравнение $\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x}) = y$. Отсюда $\sqrt{x+1000} + \sqrt{x} = 10^y$, где $y \in \mathbf{N}$. Следовательно, x – точный квадрат: $x = z^2, z \in \mathbf{N}$. (Действительно, если перенести $\sqrt{x}$ в правую часть и возвести обе части в квадрат, то получим, что $\sqrt{x}$ – рациональное число, но корень из целого числа x может быть рациональным числом только в том случае, когда x – точный квадрат). Итак, $\sqrt{z^2 + 1000} = 10^y - z \Rightarrow 1000 = 10^y(10^y - 2z)$. При $y \geq 3$ правая часть делится на 2^4 , а левая не делится, а при $y \leq 1$ правая часть меньше 100. Поэтому остается единственная возможность $y = 2$ и тогда $z = 45$. В результате $x = 45^2$.