

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)
Максимальное количество баллов – 42 балла**

Решения и критерии

1. Приведите пример натурального числа n , такого что сумма его цифр делится на 9, а сумма цифр числа $n+1$ делится на 25?

Ответ: Да, например, число из 99 единиц.

Критерии: Любое верное число - **7 баллов**. Если верность ответа не очевидна и проверки верности нет - **5 баллов**. Иначе - **0 баллов**.

2. На равнине Ахиллес в 9 раз быстрее черепахи. При подъеме в гору скорость любого поднимающегося уменьшается в некоторое число раз, а при спуске с горы увеличивается в такое же число раз. Если Ахиллес пойдет в гору, а черепаха, одновременно с ним, пойдет с горы, то они встретятся на середине подъема. Какую часть пути пройдет Ахиллес до встречи, если он будет спускаться с горы, а черепаха подниматься?

Ответ: 81/82

Решение: Пусть V_a – скорость Ахиллеса на равнине, V_c – скорость черепахи на равнине, а при движении по горе скорость меняется в a раз. Так как Ахиллес и черепаха встретились посередине, то их скорости равны, то есть $V_a/a = V_c \cdot a$. А так как по условию $V_a = 9V_c$, то $a = 3$. Тогда с горы скорость Ахиллеса будет равна $3V_a = 27V_c$, а скорость черепахи $V_c/3$. То есть скорость Ахиллеса с горы в 81 раз больше, чем скорость черепахи. Значит он пройдет 81/82 пути.

Критерии: Верное решение – **7 баллов**. Верно составлены необходимые уравнения и получен неверный ответ из-за арифметических ошибок – **5 баллов**. Верно найдено a – **2 балла**. Верный ответ – 1 балл. Иначе – **0 баллов**.

3. Числа a, b, c, d, e образуют геометрическую прогрессию, причем среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Может ли рациональных чисел быть четыре?

Ответ: Нет.

Решение: Так как рациональных чисел 4, то какие-то два из них идут в прогрессии подряд. Но тогда знаменатель прогрессии - рациональное число, а значит и все числа рациональны. Противоречие.

Критерии: Верное решение - **7 баллов**. Иначе - **0 баллов**.

4. Докажите, что для любых положительных x, y верно равенство:
$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

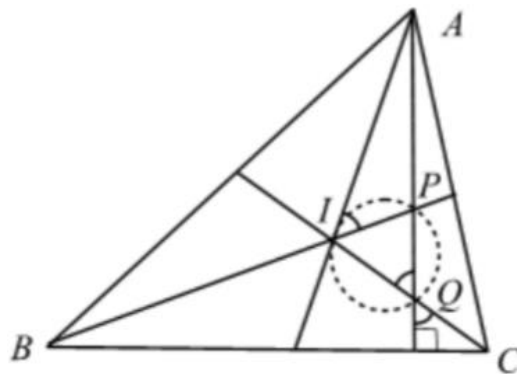
Решение: Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами x и y , тогда его гипотенуза равна $\sqrt{x^2 + y^2}$, тогда указанные слагаемые - это острые углы треугольника, откуда следует требуемое равенство.

Второе решение: обозначим $a = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $b = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Найдем синус от правой части $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, по определению $\sin(a) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\sin(b) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Используя основное тригонометрическое тождество, у учетом $a, b \in [0; \frac{\pi}{2}]$, получаем, что $\cos(b) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\cos(a) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Таким образом $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) = 1$, а так как $a+b \in [0; \pi]$, то $a+b = \frac{\pi}{2}$.

Критерии: Любое верное и обоснованное решение - **7 баллов**. Если в решении используется острота углов, но их острота не объяснена (хотя бы ссылкой на область значений $\arcsin$), получен верный ответ - **5 баллов**. Иначе - **0 баллов**.

5. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и биссектрисы BK и CL . Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми AH , BK и CL , касается биссектрисы угла BAC .

Решение: Обозначим I - точку пересечения биссектрис, P и Q - точки пересечения высоты с биссектрисами углов B и C соответственно, α, β, γ - величины углов A, B и C треугольника ABC . С одной стороны $\angle AIP = \frac{\alpha+\beta}{2}$ как внешний угол в треугольнике ABI . С другой стороны $\angle IQP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Следовательно, прямая AI является касательной к окружности, описанной около IPQ .



Критерии: Верное решение - **7 баллов**. Иначе - **0 баллов**.

6. Назовём натуральное число n полезным, если любое натуральное число меньшее, чем n , можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n . Докажите, что произведение двух полезных чисел - полезное число.

Решение: Пусть m и n - полезные числа. Докажем, что mn - полезное число. Возьмём натуральное число $k < mn$, поделим k на m с остатком: $k = mx + r$. Заметим, что $r < m$ и $x < n$. Таким образом, r представимо в виде суммы делителей числа m (а значит, и делителей mn), а x представимо в виде суммы делителей числа n (а значит, и делителей mn). Если каждый делитель числа n

умножить на m , то получим делитель числа mn . Поэтому число $mx+r$ можно представить как сумму делителей mn .

По построению, все делители, дающие в сумме xt , не меньше, чем m , тогда как все делители, дающие в сумме r , меньше, чем m , а значит они все различны. Таким образом число k - есть сумма различных делителей числа mn , то есть mn - полезное.

Критерии: Верное решение - **7 баллов**. В решении все верно, но не обоснована различность делителей - **5 баллов**. Иначе - **0 баллов**.