

Задачи муниципального этапа 2025-2026 учебного года

11 класс

11.1. Решить уравнение $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$.

Решение. Допустимые значения x : $x \geq 1$. Обозначим $a=2\sqrt{x-1}$. Возводя в квадрат обе части уравнения и выполняя преобразования, получим:

$$x-a+2\sqrt{(x-a)(x+a)}+x+a=4$$

$$2x+2\sqrt{x^2-a^2}=4$$

$$x+\sqrt{x^2-4x+4}=2$$

$$\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$$

Поскольку левая часть полученного равенства не отрицательна, правая тоже должна быть не отрицательной. Таким образом, равенство может быть выполнено, только если $1 \leq x \leq 2$. Ещё раз возведя в квадрат обе части, получим равенство $x^2-4x+4=x^2-4x+4$. Это равенство истинно при всех допустимых значениях x . То есть $x \in [1;2]$.

Ответ: $[1;2]$.

11.2. Чему может быть равно значение выражения $p^4 - 3p^3 - 5p^2 + 16p + 2015$, если p является корнем уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0$?

Решение. Преобразуем выражение:

$$p^4 - 3p^3 - 5p^2 + 16p + 2015 = (p^3 - 5p + 1) \cdot (p - 3) + 2018.$$

Так как p является корнем многочлена $p^3 - 5p + 1$, то всё выражение в правой части равно 2018, следовательно, и значение в левой части тоже равно 2018.

Ответ: 2018.

11.3. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трёх цветов?

Решение. Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую - одной из двух оставшихся. Третью - одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первая доска 3 варианта, вторая 2, далее однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

Ответ: 1530 способами.

11.4. Треугольник ABC - равносторонний. На стороне AC отметили точку M , а на стороне BC - точку N , причём $MC = BN = 2AM$. Отрезки MB и AN пересекаются в точке Q . Найдите угол CQB .

Решение. Так как $MC = BN$ и $AC = BC$, то $AM = AC - MC = BC - BN = NC$. Из того, что $AM = NC$, $AB = AC$ и $\angle BAM = \angle CAN = 60^\circ$ следует, что треугольники BAM и ACN равны, поэтому $\angle NAC = \angle MBA = \alpha$. Из треугольника ABM следует: $\angle AMB = \angle AMQ = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$. А из треугольника AQM следует:

$$\angle AQM = 180^\circ - \angle AMQ - \alpha = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) - \alpha = 60^\circ.$$

Тогда $\angle MQN = 120^\circ$, поэтому $\angle MQN + \angle MCN = 180^\circ$. Отсюда следует, что четырёхугольник $MQNC$ вписанный. Но тогда $\angle NQC = \angle NMC$. В треугольнике NMC сторона NC в два раза меньше стороны MC , а угол между ними равен 60° , поэтому этот треугольник - прямоугольный с углами $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$. Из этой же вписанности следует: $\angle MQC = \angle MNC = 90^\circ$, тогда $\angle CQB$ тоже прямой.

Ответ: 90° .

11.5. В шахматном турнире на кубок города участвовали мальчики и девочки из школ города. Каждый игрок играл с каждым по одной партии, за победу давалось 1 очко, за ничью - 0,5, за поражение - 0. По окончании турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в матчах с мальчиками. Докажите, что количество участников турнира является квадратом целого числа.

Решение. Пусть в турнире участвовали n мальчиков и k девочек. Поскольку каждый мальчик набрал половину своих очков в матчах с мальчиками, то количество очков, набранных мальчиками в матчах с девочками, равно количеству очков, набранных мальчиками в матчах между собой, то есть $\frac{1}{2}n(n-1)$. Аналогично, количество очков, набранных девочками в матчах с

мальчиками, равно количеству очков, набранных девочками в матчах между собой, то есть $\frac{1}{2}k(k-1)$. Сумма очков, набранных мальчиками в матчах с девочками, и очков, набранных девочками в матчах с мальчиками, равна количеству матчей между девочками и мальчиками, то есть nk . Таким образом, $k(k-1)+n(n-1)=2nk$, откуда получим $n+k=(k-n)^2$.