

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
Рязанская область

11 класс

1. Функция $f(x)$ определена при всех действительных x , причём при любом x выполнены равенства $f(x+2025)=f(2025-x)$ и $f(x+2026)=f(2026-x)$. Доказать, что $f(x)$ – периодическая функция.

Решение.

Из первого равенства получаем

$$f((x+2025)+2025) = f(2025 - (x+2025)) = f(-x),$$

а из второго

$$f((x+2026)+2026) = f(2026 - (x+2026)) = f(-x).$$

При произвольном x правые части приведённых равенств совпадают, следовательно, равны и левые:

$$f(x + 4050) = f(x+4052).$$

Заменив переменную $x = y - 4050$, получим, что при произвольном действительном y выполнено равенство $f(y) = f(y+2)$.

Поскольку функция $f(y)$ определена при всех действительных y , из этого равенства следует, что число 2 является её периодом.

2. К четырехзначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, что и данное, но в обратном порядке. После того, как сумму разделили на 143, получили 136. Найдите все четырехзначные числа, удовлетворяющие этим условиям.

Решение.

Обозначим искомое число как $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Тогда другое число будет $\overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Сумма этих чисел будет равна $1001a + 110b + 110c + 1001d$. Так как после деления данной суммы на 143 получилось 136, то имеем уравнение: $1001(a + d) + 110(b + c) = 19448$.

Так как $(b + c)$ не превосходит 18, а значит $110(b + c)$ не превосходит 1980. Тогда из уравнения получаем, что равенство возможно лишь при $a = d = 9$. Тогда имеем: $110(b + c) = 19448 - 18018$, которое равносильно уравнению: $b + c = 13$. Перебором находим все возможные значения для букв b и c , соответственно получаем 6 вариантов четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию: 9949, 9859, 9769, 9679, 9589, 9499.

Ответ: 9949, 9859, 9769, 9679, 9589, 9499.

3. Чему равно произведение $\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 5^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ$?

Решение.

Введем $a = \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ$ и $b = \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ$. Тогда $\frac{a}{b} = \sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ$.

Применяя формулу двойного угла, получим:

$$\frac{a}{b} = 2^{44} \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 44^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \dots \cdot \cos 44^\circ.$$

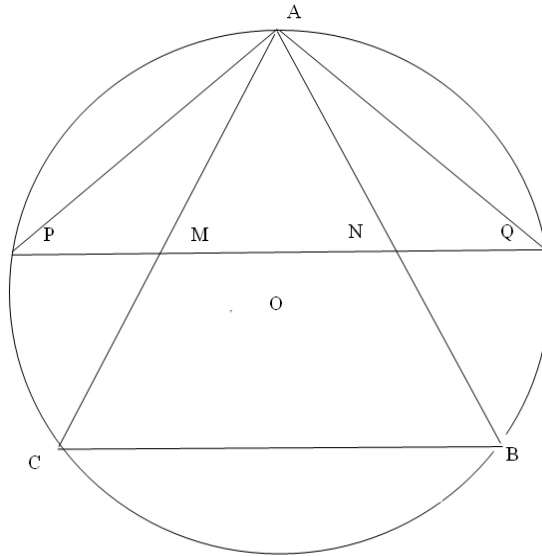
Откуда находим:

$$\begin{aligned} b &= \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ = \\ &= \frac{a}{2^{44} \cdot \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ} = \\ &= \frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ}{2^{44} \cdot \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ} = \\ &= \frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 46^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ}{2^{44} \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \cos 44^\circ} = \\ &= \frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 46^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ}{2^{44} \cdot \sin 89^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \dots \cdot \sin 46^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2^{44}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}$.

4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность радиуса R. Пусть M и N – соответственно середины сторон AC и AB, а прямая MN пересекает дугу AC в точке P, а дугу AB в точке Q. Найдите $AP^2 + AQ^2$.

Решение.



1. Так как MN средняя линия, то MN параллельно BC. Значит дуги PC и QB равны, отсюда равны дуги и отрезки AP и AQ.

2. $\angle CBA = \angle MNA = 60^\circ$ как соответственные, отсюда $\angle ANQ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, $\cos \angle ANQ = \cos 120^\circ = -1/2$.

3. По теореме косинусов в треугольнике ANQ имеем

$$\begin{aligned} AP^2 + AQ^2 &= 2AQ^2 = 2(AN^2 + NQ^2 - 2AN \cdot NQ \cdot \cos \angle ANQ) = \\ &= 2(AN^2 + NQ^2 + AN \cdot NQ). \end{aligned} \quad (1)$$

4. Пусть $AN=x$, тогда $AB=2x$, $MN=x$. По теореме синусов из треугольника ABC имеем

$$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2x}{\sin 60^\circ} = 2R$$

Отсюда

$$x = R \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} R. \quad (2)$$

5. Из равенства треугольников PMA и QNA следует, что $PM=NQ$, обозначим $PM=NQ=y$. Согласно свойству хорд в окружности имеем $AN \cdot NB = PN \cdot NQ$, значит $x^2 = (x+y)y$. Отсюда с учетом (2) получаем уравнение

$$4y^2 + 2\sqrt{3}Ry - 3R^2 = 0.$$

Положительным корнем уравнения является число $y = \frac{\sqrt{3}R(\sqrt{5}-1)}{4}$.

6. Возвращаясь к искомой величине согласно (1) получаем

$$AP^2 + AQ^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) = 2\left(\frac{3R^2}{4} + \frac{3R^2(\sqrt{5}-1)^2}{16} + \frac{3R^2(\sqrt{5}-1)}{8}\right) = \frac{24R^2}{8} = 3R^2.$$

Ответ: $3R^2$.

5. В некоторой семье есть братья и сёстры (как минимум 2 брата и как минимум 2 сестры). Час назад каждый брат в семье был в ссоре с одинаковым числом сестёр, а все сёстры были в ссоре с различным числом братьев. Но сейчас некоторые пары помирились, и теперь каждая сестра в ссоре с одинаковым числом братьев, а братья в ссоре с разным числом сестёр. Сколько же братьев и сколько сестёр в этой семье?

Решение.

Покажем, что число братьев должно равняться числу сестёр. Пусть имеется m братьев и n сестёр. Поскольку сейчас все братья в ссоре с разным числом сестёр, значит, есть хотя бы одна пара, которая всё ещё находится в ссоре. Поскольку сейчас каждая сестра находится в ссоре с одним и тем же числом братьев, значит каждая в ссоре хотя бы с одним из них, и час назад она с этим братом тоже была в ссоре. Но час назад сёстры были в ссоре с разным числом братьев. Обозначим a_i число братьев, бывших в ссоре с i -й сестрой час назад. Все числа $a_1, \dots, a_n$ — это различные натуральные числа, не превосходящие m , следовательно, $n \leq m$ (число сестёр не больше, чем число братьев).

С другой стороны, час назад каждая сестра была в ссоре с разным числом братьев, следовательно, одна из сестёр не была в ссоре хотя бы с одним братом. Братья же были в ссоре с одинаковым числом сестёр, значит, каждый не был в ссоре хотя бы с одной из них. После примирения число ссорящихся пар уменьшилось, и теперь по-прежнему каждый из братьев не в ссоре хотя бы с одной из сестёр. Обозначим b_j число сестёр, с которыми находится в ссоре брат с номером j . Числа $b_1, \dots, b_m$ – различные целые неотрицательные числа, не превосходящие $n - 1$, следовательно, $m \leq n$ (число братьев не больше, чем число сестёр). Утверждение доказано, равенство $m = n$ является истинным.

Осталось найти возможные значения для числа $m = n$. Как видно из предыдущего рассуждения, час назад была сестра, которая была в ссоре ровно с одним братом. Значит, после примирения каждая из сестёр находится в ссоре ровно с одним братом. Общее число ссорящихся пар равно n . И при этом число ссорящихся пар равно $n = 0 + 1 + \dots + (n - 1)$, откуда $n = 3$.

Приведём пример, показывающий, что такая ситуация возможна. Обозначим братьев буквами А, В, С, а сестёр – цифрами 1, 2, 3. Запись вида А3 будет означать, что брат А в ссоре с сестрой 3. Пусть множество пар в ссоре час назад было $\{A1, A3, B2, B3, C2, C3\}$, а после примирения – $\{A1, C2, C3\}$. Легко видеть, что в этом примере условия выполняются.

Ответ: Три брата и три сестры.

Комментарий. Если дан только ответ без обоснования - 0 баллов. Если приведён пример без доказательства равенств $m = n = 3$, 1 балл.