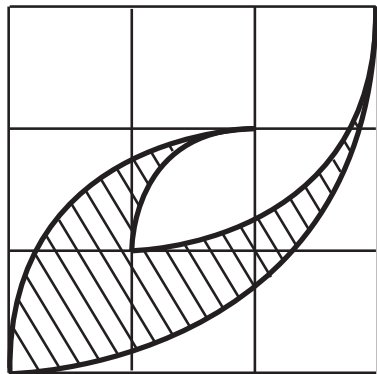


**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
11 класс**

Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут

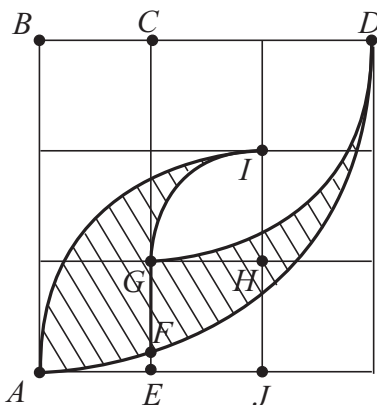


К условию задачи 11.1

11.1. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (см. рисунок), границей которой является круговой сплайн — замкнутая непрерывная линия, составленная из дуг окружностей (с центрами в узлах сетки). Длина стороны клетки равна 1.

Решение:

Способ 1. Обозначим центры и концы дуг окружностей так, как показано на рисунке. Введём обозначение: через $S_{X,\overline{YZ}}$ будем обозначать площадь сектора окружности с центром X , ограниченного дугой YZ . Разделим фигуру, площадь которой требуется найти, на две отрезком GF и найдём по отдельности площадь каждой из частей. Площадь правой фигуры равна $S_{\text{пр}} = S_{B,\overline{AD}} - S_{C,\overline{GD}} - (S_{ABCE} - x)$, где x — площадь фигурки, ограниченной отрезками AE , EF и дугой AF .



К решению задачи 11.1,
способ 1

Все секторы являются четвертинками кругов и их площади находятся элементарно; поэтому

$$S_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{4}\pi 2^2 - 3 + x = \frac{5\pi}{4} - 3 + x.$$

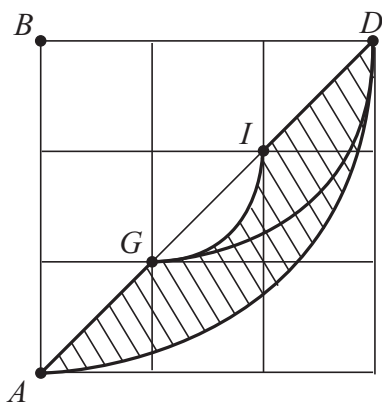
Аналогично, площадь левой фигурки равна

$$\begin{aligned} S_{\text{л}} &= S_{J,\overline{AI}} - S_{J,\overline{GI}} - S_{EGHJ} - x = \\ &= \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{1}{4}\pi 1^2 - 1 - x = \frac{3\pi}{4} - 1 - x. \end{aligned}$$

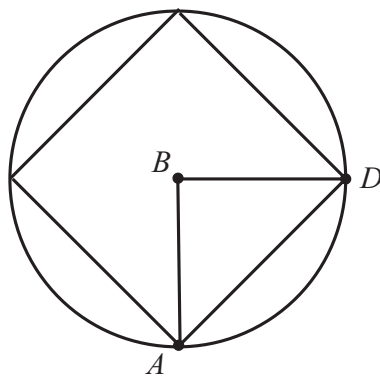
Поэтому общая площадь равна $S_{\text{пр}} + S_{\text{л}} = 2\pi - 4$.

Способ 2. Разрежем фигурку по прямой AD , и ту часть, которая лежит выше прямой, повернём на 180° (см. рисунок ниже слева). Получим равную по площади фигуру (заштрихованная часть на рисунке). Она представляет собой разность двух сегментов, линейные размеры меньшего из которых в три раза меньше линейных размеров большего. Так как площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, интересующая нас площадь равна $\frac{8}{9}$ площади большего сегмента. Но этот сегмент — ровно четверть площади фигуры, которая получится, если из круга радиуса 3 удалить вписанный в него квадрат (см. рисунок ниже справа), поэтому его площадь равна $\frac{1}{4}(9\pi - (3\sqrt{2})^2)$. Тогда искомая площадь равна

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{9\pi - 18}{4} = 2\pi - 4.$$



К решению задачи 11.1, способ 2, разрез
фигуры



К решению задачи 11.1, способ 2, удаление
квадрата

Ответ: $2\pi - 4$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	5 баллов
Задача верно сведена к нахождению площадей круговых секторов и/или сегментов с известными центральными углами, но расчёты не выполнены	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

11.2. Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Действительные числа a, b, c попарно различны и таковы, что $P(a) = bc$, $P(b) = ca$, $P(c) = ab$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)} ?$$

Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть $P(x) = mx^2 + nx + t$. Тогда (учитывая, что $a - b \neq 0$) имеем $P(a) - P(b) = m(a + b)(a - b) + n(a - b) = c(b - a)$, откуда $m(a + b) + n = -c$. Аналогично $m(b + c) + n = -a$. Вычтем из одного уравнения другое и получим $m = 1$ (опять-таки учли, что $a - c \neq 0$). Тогда

$$n = -(a + b + c), \quad t = ab + ac + bc, \\ p(x) = x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc,$$

наше выражение тождественно равно 1, так как

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)} = \frac{bc + ca + ab}{(a + b + c)^2 - (a + b + c)(a + b + c) + ab + ac + bc} = 1.$$

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Задача решена для случая приведённого квадратного трёхчлена	4 балла
Условие задачи верно записано в виде системы уравнений (неизвестные — коэффициенты трёхчлена)	2 балла
Верный ответ, проиллюстрированный конкретным трёхчленом (и конкретной тройкой чисел a, b, c)	1 балл
Ответ без обоснования, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

11.3. У натурального числа n нашлись два различных натуральных делителя m и k , для которых выполнено равенство

$$k = \frac{n - m}{m - 5}.$$

Докажите, что число $\frac{n}{5}$ — целое и является квадратом натурального числа.

Решение: Уравнение из условия задачи равносильно равенству $km - 5k + m = n$. Число $m = n + 5k - km$ делится без остатка на k , так как k — делитель каждого слагаемого в правой части. Аналогично, число $5k = -n + m + km$ делится без остатка на m . Пусть $m = tk$, где $t \in \mathbb{N}$. Тогда $5k$ кратно числу tk , то есть 5 кратно t . Значит, либо $t = 1$, либо $t = 5$. Первый случай невозможен, так как $m \neq k$ по условию. Итак, $t = 5$, $m = 5k$, $n = km = 5k^2$. Тогда $\frac{n}{5} = k^2$, ч. т. д.

Ещё подчеркнём, что искомые тройки чисел m, k и n существуют. Например, $n = 45$, $k = 3$, $m = 15$.

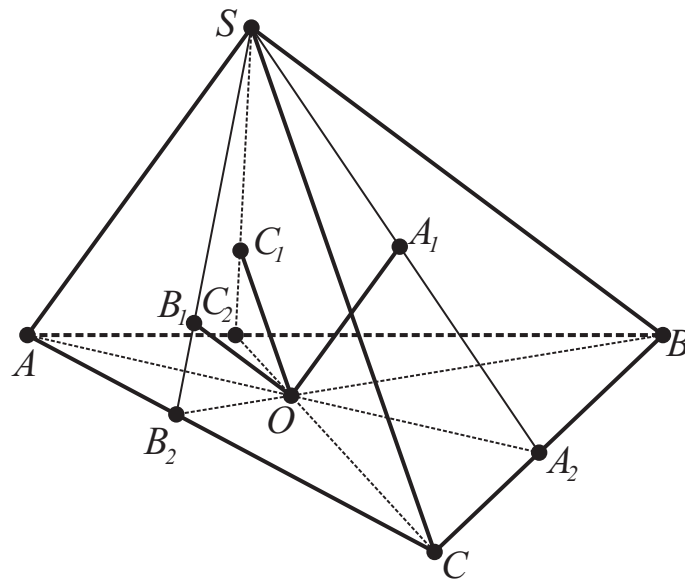
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример натуральных чисел n, m и k , удовлетворяющих условию задачи	баллы не снижать
Доказано, что а) число m кратно k ; б) число m является делителем числа $5k$	4 балла
Доказан один из пунктов а) или б) критерия на 4 балла	2 балла
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

11.4. Из произвольной точки O , лежащей на грани ABC треугольной пирамиды $SABC$ провели прямые $OA_1 \parallel SA$, $OB_1 \parallel SB$ и $OC_1 \parallel SC$ (точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на гранях SBC , SCA и SAB соответственно). Докажите равенство

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

Решение: Пусть плоскость ASO пересекает ребро BC в точке A_2 , тогда эта плоскость пересекает грань SBC по отрезку SA_2 . Прямая OA_1 лежит в плоскости SAO , так как она имеет с ней общую точку O и параллельна лежащей в ней прямой SA . Значит, точка A_1 лежит на отрезке SA_2 . Аналогично точки B_1 и C_1 лежат на отрезках SB_2 и SC_2 соответственно (точки B_2 и C_2 определяются аналогично точке A_2) — см. рисунок.



К решению задачи 11.4, расположение точек A_1 , B_1 , C_1

Из подобных треугольников A_2A_1O и A_2SA получаем равенство

$$\frac{OA_1}{SA} = \frac{A_2O}{A_2A}.$$

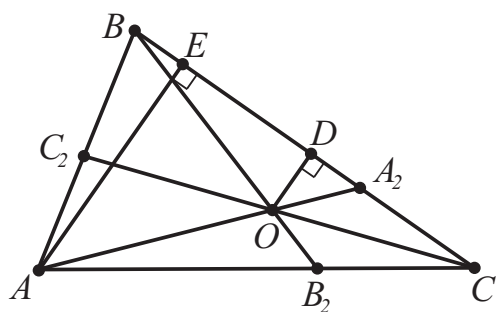
Конечно, такие же равенства верны и для двух других дробей:

$$\frac{OB_1}{SB} = \frac{B_2O}{B_2B}, \quad \frac{OC_1}{SC} = \frac{C_2O}{C_2C}.$$

Задача свелась к планиметрической: «если на сторонах AB , AC и BC выбраны соответственно точки C_2 , B_2 и A_2 так, что отрезки AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в точке O , то выполняется равенство

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = 1.$$

Докажем это утверждение.



К решению задачи 11.4, картина в основании пирамиды

Опустим из точек A и O перпендикуляры на прямую BC — отрезки OD и AE (см. рисунок). Тогда из подобия треугольников AA_2E и OA_2D следует, что

$$\frac{OA_2}{A_2A} = \frac{OD}{AE} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OD}{\frac{1}{2}BC \cdot AE} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\frac{OB_2}{B_2B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}}, \quad \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}}.$$

Значит,

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}} = \frac{S_{BAC}}{S_{BAC}} = 1.$$

Доказательство завершено.

Примечание: Для школьников, знающих формулу объёма пирамиды, задача допускает следующее решение: Пирамида $SABCD$ представляется как объединение трёх пирамид $SABO$, $SBCO$, $SCAO$. Каждая из дробей в доказываемой формуле равна отношению объёмов одной из этих пирамид к объёму всей пирамиды $SABC$ — доказательство почти такое же, как в приведённом выше решении для площадей треугольников.

Рекомендации по проверке:

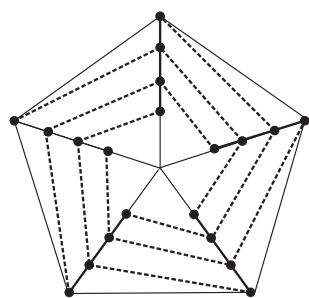
Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Задача верно сведена к планиметрической ИЛИ дроби в доказываемом равенстве представлены в виде отношения объёмов пирамид	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также решения в частных случаях (для конкретных точек O)	0 баллов

11.5. Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырёх человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена, и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах. Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей? Ответ обоснуйте.

Решение: Добавим к каждому человеку его двойника, но потребуем, чтобы каждый человек был в составе не более, чем одного экипажа. Тогда для 10 экипажей

потребуется ровно 40 человек, поэтому до добавления двойников в центре подготовки было по крайней мере 20 человек. Покажем, что 20 человек достаточно. Сначала сформируем из них пять экипажей, не имеющих общих членов. При своим этим экипажам номера от 1 до 5. В шестой экипаж отрядим по одному космонавту из экипажей 1, 2, 3, 4. В седьмой — по одному из экипажей 1, 2, 3, 5 (берём других космонавтов), в восьмой — из экипажей 1, 2, 4, 5, в девятый — из экипажей 1, 3, 4, 5, наконец, в десятый — 2, 3, 4, 5. Условие задачи выполнено.

Примечание: Сформировать экипажи нужным образом можно и чисто геометрически, например, так. Построим космонавтов в пять колонн, по 4 человека в каждой, а каждую колонну поставим на своей линии, идущей от вершины правильного пятиугольника к его центру. Первые пять экипажей — сами колонны



К примечанию
к задаче 11.5

(см. рисунок). Теперь дальних от центра пятиугольника космонавтов не двигаем, тех кто стоит непосредственно перед ними (второй ряд) сдвинем по кругу влево на одного человека, третий ряд — влево на двух человек, а четвёртый — влево на трёх. Космонавты, оказавшиеся после сдвигов в одной колонне, образуют ещё пять экипажей — пунктирные линии на рисунке.

Ответ: 20 космонавтов.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Пример на 20 человек	4 балла
Доказано, что необходимо не менее 20 человек	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

11.6. Известно, что числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ являются рациональными, и ни одно из них не равно 0. Докажите, что тогда число $\sin 12x$ также является рациональным.

Решение: Пусть

$$\begin{aligned}\sin 2x &= a, & \sin 5x &= b, & \sin 7x &= c, & \sin 12x &= d, \\ \cos 2x &= X, & \cos 5x &= Y, & \cos 7x &= Z.\end{aligned}$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a = \sin 2x = \sin (7x - 5x) = cY - bZ, \\ b = \sin 5x = \sin (7x - 2x) = cX - aZ, \\ c = \sin 7x = \sin (5x + 2x) = bX + aY. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что

$$Y = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2ac} \quad \text{и} \quad Z = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2ab}$$

являются рациональными числами, поскольку числа a, b, c — рациональные. Для решения задачи остается заметить, что $d = \sin 12x = \sin(5x + 7x) = bZ + cY$ — рациональное число.

Примечание: Числа x , синусы которых удовлетворяют условию задачи, существуют, так что задача корректно определена. Действительно, достаточно взять любое число x , для которого и $\sin x$, и $\cos x$ являются рациональными числами, например $x = \arcsin 0,6$. В этом случае все числа вида $\sin nx$ и $\cos nx$ ($n \in \mathbf{N}$) будут рациональны (доказывается индукцией по n).

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример числа x , удовлетворяющего условию задачи	баллы не снижать
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов