

11 класс

1. Сколько существует 11-значных натуральных чисел, которые делятся на 9 и в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

Ответ: 45.

Решение. Пусть число содержит k цифр 8. Тогда сумма его цифр равна $8k$. По признаку делимости на 9 необходимо, чтобы $8k$ делилось на 9. Поскольку числа 8 и 9 взаимно просты, k должно делиться на 9. Учитывая, что число 11-значное и первая цифра равна 8, количество восьмёрок k удовлетворяет неравенству $1 \leq k \leq 11$. Единственное значение k , кратное 9 в этом диапазоне, это $k = 9$.

Поэтому в записи числа участвуют 9 восьмёрок и два нуля. И наоборот, каждое число из 9 восьмёрок и двух нулей удовлетворяет условию. Первая цифра — это 8, поэтому нули можно разместить на любых двух из оставшихся 10 позиций. Количество способов выбрать 2 позиции из 10 равно $C_{10}^2 = 45$.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Введена переменная k (количество восьмёрок) и доказано, что $8k$ кратно 9 — 2 балла. Доказано, что количество k восьмёрок делится на 9 — 3 балла. Найдено значение $k = 9$ — 5 баллов. Ошибка при подсчёте — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. Все члены геометрической прогрессии — целые числа. Верно ли, что сумма квадратов а) трёх; б) четырёх последовательных членов этой прогрессии всегда делится на сумму этих членов?

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Рассмотрим три последовательных члена геометрической прогрессии: a, aq, aq^2 , где a и q таковы, что все члены — целые числа. Обозначим $S = a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2)$ и $Q = a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = a^2(1 + q^2 + q^4)$. Тогда

$$\frac{Q}{S} = \frac{a^2(1 + q^2 + q^4)}{a(1 + q + q^2)} = a \cdot \frac{1 + q^2 + q^4}{1 + q + q^2}.$$

Заметим, что $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)^2 - q^2$, поэтому $1 + q^2 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 - q + q^2)$. Значит, $\frac{Q}{S} = a(1 - q + q^2)$. Поскольку a, aq, aq^2 — целые числа, то $a(1 - q + q^2) = a - aq + aq^2$ также целое. Таким образом, Q делится на S .

б) Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, 2, 4, 8, \dots$. Для неё сумма квадратов четырёх последовательных членов $1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 = 85$ не делится на их сумму $1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Значит, утверждение для четырёх членов неверно.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Разложение $1 + q^2 + q^4$ на множители — 2 балла. Обоснование делимости в пункте а) — 5 баллов. Правильный контрпример в пункте б) — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Пусть x, y, z — различные целые числа такие, что $xy + yz + zx = 47$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 50.

Решение. Поскольку числа x, y и z — различные, можно считать, что $x < y < z$. Тогда $y - x \geq 1$, $z - y \geq 1$ и $z - x \geq 2$, поэтому

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 1^2 + 1^2 + 2^2.$$

Раскрыв скобки и сокращая на 2, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 3,$$

и так как $xy + yz + zx = 47$, имеем $x^2 + y^2 + z^2 \geq 50$.

Знак равенства достигается, например, для чисел $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Найдено неравенство $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 50$ (например, из соображений о минимальности квадратов разностей) — 5 баллов. Приведён пример чисел x , y и z , для которых достигается минимум — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. На вечеринке собрались 9 человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Группу из трёх человек назовём *дружеской*, если все трое знакомы друг с другом, и *незнакомой*, если никакие двое в этой тройке не знакомы между собой. Какое наименьшее возможное значение может принимать суммарное количество дружеских и незнакомых троек?

Ответ: 12 *троек*.

Решение. Рассмотрим граф из 9 вершин, соответствующих гостям вечеринки. Две вершины графа соединим красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы друг с другом, и синим отрезком, если не знакомы. Докажем, что общее число красных и синих треугольников не менее 12.

Обозначим через E , F и G — количество красных, синих и *неполных* треугольников, содержащих рёбра обоих цветов (такие тройки не являются ни дружескими, ни незнакомыми). Тогда общее число треугольников в графе равно

$$E + F + G = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84. \quad (3)$$

Пронумеруем всех гостей от 1 до 9, и пусть d_i — количество знакомых i -го человека, тогда количество незнакомых с ним будет $8 - d_i$. Для каждого гостя i выберем одного знакомого с ним человека j — это можно сделать d_i способами, а также одного незнакомого с ним человека k — это можно сделать $(8 - d_i)$ способами. Полученная тройка ijk образует *неполный* треугольник. Таким образом, для каждого гостя получается $d_i(8 - d_i)$ неполных треугольников. Заметим, что каждый неполный треугольник при таком способе подсчёта учитывается дважды — для каждой из двух вершин треугольника ijk , из которых исходят разноцветные рёбра. (Если отрезок jk синий, то треугольник ijk учитывается также при подсчёте неполных треугольников, связанных с j -м человеком. Если же отрезок jk красный, то треугольник ijk учитывается при подсчёте неполных треугольников, связанных с k -м человеком.) Следовательно,

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 d_i(8 - d_i).$$

Поскольку $x(8 - x) = 16 - (x - 4)^2$, каждое слагаемое в этой сумме не больше 16, и значит, $G \leq \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16$, то есть $G \leq 72$. Отсюда и из равенства (3) следует, что $E + F = 84 - G \geq 12$.

Приведём ПРИМЕР, подтверждающий точность этой оценки.

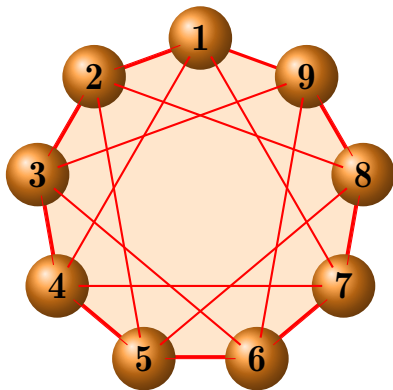


Рис. 7

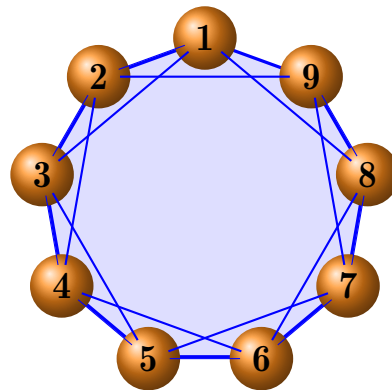


Рис. 8

На рисунке 7 изображён граф в виде 9-угольника, у которого из каждой вершины выходит по 4 красных (они указаны на рисунке) и по 4 синих (их на рисунке нет) ребра. Такой граф называется

4-регулярным. У него ровно 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих – 135, 357, 579, 792, 924, 246, 468, 681, 813.

На рисунке 8 этот же граф реализован по-другому. Из каждой вершины графа выходят 4 синих рёбра – в каждые две вершины, соседние справа и слева от неё. В этом графе также 3 красных треугольника 147, 258, 369 и 9 синих – 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 891, 912.

Замечание. Эта задача является продолжением (и обобщением) известной задачи, в которой требуется доказать, что в компании из 6 человек всегда найдутся трое, попарно знакомых между собой, или трое, попарно не знакомых.

Критерии. Записано соотношение $E + F + G = C_9^3 = 84 - 1$ балл. Доказано, что число неполных треугольников графа знакомств равно $\frac{1}{2} \sum d_i(8 - d_i) - 2$ балла. Доказано, что число неполных треугольников $d_i(8 - d_i) \leq 16$ для каждой вершины – 3 балла. Доказано, что число дружеских и незнакомых троек не меньше 12 – 4 балла (оценка). Приведён пример 4-регулярного графа без подсчёта числа троек – 5 баллов. Приведён пример с подсчётом, но не все тройки явно указаны – 6 баллов. Полное решение – 7 баллов.

5. Окружность ω с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках B и C соответственно. Внутри угла BAC выбрана точка Q , причём на отрезке AQ нашлась точка P такая, что $AQ \perp OP$. Прямая OP вторично пересекает описанные окружности треугольников QPB и QPC в точках M и N соответственно. Докажите, что $OM = ON$.

Решение. Пусть описанные окружности треугольников QPB и QPC пересекают лучи AB и AC в точках D и E соответственно (рис. 9). Из теоремы о произведении отрезков секущих получаем:

$$AB \cdot AD = AP \cdot AQ \quad \text{и} \quad AC \cdot AE = AP \cdot AQ.$$

Отсюда $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Отрезки AB и AC равны как отрезки касательных к ω , поэтому $AD = AE$ и, значит, треугольник ADE равнобедренный.

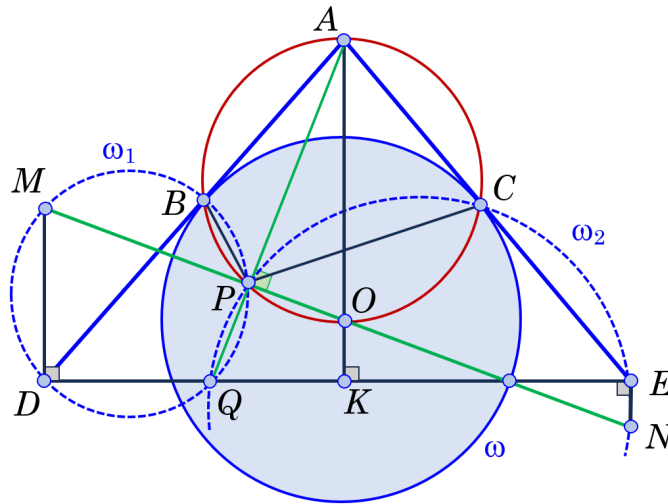


Рис. 9

Пусть K — середина DE . Тогда прямая AK является медианой, высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника ADE , в частности, AK проходит через O . Поскольку B и C — точки касания окружности с центром O , имеем $\angle ABO = \angle ACO = \angle APO = 90^\circ$, то есть точки A, B, C, P, O лежат на окружности с диаметром AO .

Из вписанных четырёхугольников $ABPC, BPQD, CPQE$ имеем:

$$\angle PQD = 180^\circ - \angle PBD = \angle ABP = 180^\circ - \angle ACP = \angle PCE = 180^\circ - \angle PQE,$$

поэтому точка Q лежит на отрезке DE .

Так как четырёхугольник $PQDM$ вписанный, то $\angle MDQ = \angle MPQ = 90^\circ$, откуда $MD \perp DE$. Аналогично, $NE \perp DE$. Таким образом, $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$. Отсюда $OM = ON$.

Критерии. Доказано, что $AD = AE$ — 2 балла. Установлено, что прямая AO содержит биссектрису, медиану и высоту треугольника ADE — 3 балла. Дополнительно доказано, что точки A, B, C, P, O лежат на одной окружности (с использованием прямых углов) — 4 балла. Доказано, что точка Q лежит на отрезке DE — 5 баллов. Доказано, что $MD \parallel OK \parallel NE$ и $DK = KE$ — 6 баллов.