

КЛЮЧИ

Время выполнения заданий – 235 мин.

Максимальное количество первичных баллов – 35, итоговых – 100.

1. Известно, что числа p , $2p + 1$, $\frac{p+1}{2}$ – простые. Чему может равняться p ? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 3 или 5.

Решение. Число p при делении на 3 может давать в остатке 0, 1 или 2.

В первом случае оно равно 3, так как если число кратно 3 и не равно 3, то оно составное. Этот случай подходит, так как $2p + 1 = 7$ и $\frac{p+1}{2} = 2$ – простые.

Во втором случае оно имеет вид $p = 3n + 1$ (n – натуральное), тогда $2p + 1 = 6n + 3 = 3(2n + 1)$ кратно трём и больше 3, следовательно, это число составное. Этот случай невозможен.

В третьем случае оно имеет вид $p = 3n - 1$ (n – натуральное), тогда $\frac{p+1}{2} = \frac{3n}{2}$. Так как это число целое, то n должно быть чётным, то есть иметь вид $n = 2k$ (k – натуральное), при этом $\frac{p+1}{2} = 3k$. Для того, чтобы быть простым, последнее число должно равняться 3, что достигается при $k = 1$, тогда $p = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. При этом $2p + 1 = 11$, этот случай подходит.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только ответ без обоснования или с совершенно неверным обоснованием – 0 баллов.

Только ответ с необоснованным утверждением, что в остальных случаях одно из чисел будет кратно трём – 1 балл.

Если к правильному ответу добавлен случай, где $p = 1$, оценка снижается на 1 балл.

2. Чему равно значение выражения $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, если $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\sqrt{7}}{119}$? Ответ не должен содержать корни и степени с дробным показателем.

Ответ: 2025.

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 - 2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 - 2 = \\ &= \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} \right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{\sin 2x} \right)^2 - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2.\end{aligned}$$

$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, следовательно,

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
11 класс**

$$\cos^2 2x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{17 \cdot 7}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{17^2 \cdot 7}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{2023}} = 1 \cdot \frac{2027}{2023} = \frac{2023}{2027}.$$

$$\sin^2 2x = 1 - \frac{2023}{2027} = \frac{4}{2027}, \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4 \cdot \frac{4}{2027} - 2 = 2027 - 2 = 2025.$$

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

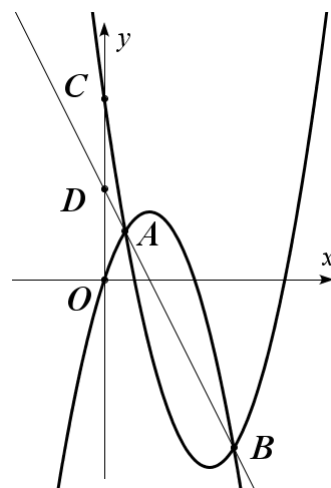
Ход решения и все используемые формулы верны, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 5-6 баллов.

3. Парабола с уравнением $y = -x^2 + px + q$, проходящая через начало координат O , пересекает в точках A и B параболу с уравнением $y = x^2 + rx + s$, проходящую через точку C на оси Oy . Докажите, что прямая AB пересекает отрезок OC в его середине.

Решение. Так как первая парабола проходит через начало координат, то $q = 0$, при этом точка C имеет ординату s . Пусть D – точка пересечения прямых AB и OC , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты точек A и B соответственно, и пусть $y = kx + m$ – уравнение прямой AB . Тогда точка D имеет ординату m . Так как прямая AB пересекается с обеими параболами по одной и той же паре точек с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , то эти две пары являются решениями систем уравнений

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ y = -x^2 + px \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = kx + m, \\ y = x^2 + rx + s. \end{cases}$$

Следовательно, x_1 и x_2 – корни каждого из уравнений $kx + m = -x^2 + px$ и $kx + m = x^2 + rx + s$. Эти уравнения равносильны уравнениям $x^2 + (k - p)x + m = 0$ и $x^2 + (r - k)x + (s - m) = 0$. Так как их старшие коэффициенты совпадают и наборы корней совпадают, то и остальные коэффициенты совпадают, следовательно, $m = s - m$, то есть $m = \frac{s}{2}$. Таким образом, точка D – середина отрезка OC .



Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Приведено доказательство для частного случая – 0 баллов.

4. На доске написано натуральное трёхзначное число. Андрей выполняет с написанным на доске числом одно из трёх действий: увеличивает его на 25%, или увеличивает его на 60%, или уменьшает его на 60% (получившееся число уже не обязано быть натуральным). После этого результат действия записывается на доску, а предыдущее число стирается. С новым числом также выполняется одно из трёх действий и т. д. Оказалось, что после нескольких таких действий первоначальное число увеличилось на 2025. Какое число было первоначально написано на доске? Найдите все возможные варианты и докажете, что других нет.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
11 класс

Ответ: 135, 225, 375 или 675.

Решение. Обозначим исходное число через A . Если на доске в какой-то момент находится число a и оно увеличивается на 25%, то получится число $\left(1 + \frac{25}{100}\right)a = \frac{5}{4}a$; если оно увеличивается на 60%, то получится число $\left(1 + \frac{60}{100}\right)a = \frac{8}{5}a$; если оно уменьшается на 60%, то получится число $\left(1 - \frac{60}{100}\right)a = \frac{2}{5}a$. Если было выполнено x действий первого вида, y действий второго вида и z действий третьего вида, то в результате получим число

$$B = A \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^y \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^z = \frac{5^x \cdot 2^{3y} \cdot 2^z}{2^{2x} \cdot 5^y \cdot 5^z} \cdot A = 2^{3y+z-2x} \cdot 5^{x-y-z} \cdot A = A + 2025.$$

Возможны 3 случая:

- 1) $3y + z - 2x > 0$ и $x - y - z \leq 0$;
- 2) $3y + z - 2x \leq 0$ и $x - y - z > 0$;
- 3) $3y + z - 2x > 0$ и $x - y - z > 0$.

(случай $3y + z - 2x \leq 0$ и $x - y - z \leq 0$ невозможен, так в этом случае $B \leq 2^0 \cdot 5^0 \cdot A = A$).

Случай 1. $3y + z - 2x > 0$ и $x - y - z \leq 0$. Положим $n = 3y + z - 2x$, $m = y + z - x$ ($n \geq 1$, $m \geq 0$).

Тогда имеем равенство $\frac{2^n A}{5^m} = A + 2025$. Отсюда следует, что $A : 5^m$, то есть $A = 5^m \cdot b$, где b – натуральное. Тогда $2^n b = 5^m b + 2025$, следовательно, $2025 : b$, то есть $2025 = b \cdot c$, где c – натуральное. Так как $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ и A – трёхзначное, то $b \neq 2025$, следовательно, $c \geq 3$. Имеем $2^n b = 5^m b + bc$, откуда следует равенство

$$2^n = 5^m + c \quad (1),$$

где c – делитель числа 2025.

1а) Пусть $c : 5$ и $m = 0$. Тогда имеем $2^n = 1 + c$, где $c \in \{5, 15, 45, 135, 405, 25, 75, 225, 675, 2025\}$. Это уравнение имеет решение только при $c = 15$, тогда $n = 4$, $b = 135$, $A = 135$, $3y + z - 2x = 4$, $y + z - x = 0$. Следовательно, $x = y + z$, $3y + z - 2y - 2z = 4$, $y = z + 4$. Можно взять $z = 0$, тогда $x = y = 4$.

1б) Пусть $c : 5$ и $m > 0$. Тогда $5^m + c : 5$, но 2^n не кратно 5, противоречие.

1в) Пусть c не кратно 5. Тогда $c \in \{3, 9, 27, 81\}$.

Если $c = 3$, то $b = 675$, $A = 5^m \cdot b = 5^m \cdot 675 < 1000$, то есть $m = 0$. Имеем $2^n = 5^0 + 3 = 4$, тогда $n = 2$, $A = 675$, $3y + z - 2x = 2$, $y + z - x = 0$. Следовательно, $x = y + z$, $3y + z - 2y - 2z = 2$, $y = z + 2$. Можно взять $z = 0$, тогда $x = y = 2$.

Если $c = 9$, то $b = 225$, $A = 5^m \cdot b = 5^m \cdot 225 < 1000$, то есть $m = 0$. Имеем $2^n = 5^0 + 9 = 10$, нет решений.

Если $c = 27$, то $b = 75$, $100 \leq A = 5^m \cdot b = 5^m \cdot 75 < 1000$, то есть $m = 1$. Имеем $2^n = 5^1 + 27 = 32$, тогда $n = 5$, $A = 375$, $3y + z - 2x = 5$, $y + z - x = 1$. Следовательно, $x = y + z - 1$, $3y + z - 2y - 2z + 2 = 5$, $y = z + 3$. Можно взять $z = 0$, тогда $y = 3$, $x = 2$.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
11 класс**

Если $c = 81$, то $b = 25$, $100 \leq A = 5^m \cdot b = 5^m \cdot 25 < 1000$, то есть $1 \leq m \leq 2$. Тогда $2^6 < 86 = 5 + 81 \leq 5^m + 81 \leq 25 + 81 = 106 < 2^7$, следовательно, уравнение $2^n = 5^m + 81$ не имеет решений.

Случай 2. $3y + z - 2x \leq 0$ и $x - y - z > 0$. Положим $n = x - y - z$, $m = 2x - 3y - z$ ($n \geq 1$, $m \geq 0$).

Тогда имеем равенство $\frac{5^n A}{2^m} = A + 2025$. Отсюда следует, что $A : 2^m$, то есть $A = 2^m \cdot b$, где b – натуральное. Тогда $5^n b = 2^m b + 2025$, следовательно, $2025 : b$, то есть $2025 = b \cdot c$, где c – натуральное. Как и раньше, имеем $b \neq 2025$, следовательно, $c \geq 3$. Имеем $5^n b = 2^m b + bc$, откуда следует равенство

$$5^n = 2^m + c \quad (2),$$

где c – делитель числа 2025. Так как $5^n : 5$ и 2^m не кратно 5, то c не кратно 5. Тогда $c \in \{3, 9, 27, 81\}$.

Если $c = 3$, то $b = 675$, $A = 2^m \cdot b = 2^m \cdot 675 < 1000$, то есть $m = 0$. Имеем $5^n = 2^0 + 3 = 4$, нет решений.

Если $c = 9$, то $b = 225$, $A = 2^m \cdot b = 2^m \cdot 225 < 1000$, то есть $0 \leq m \leq 2$. Тогда $5^1 < 10 = 1 + 9 \leq 2^m + 9 \leq 4 + 9 = 13 < 5^2$, следовательно, уравнение $5^n = 2^m + 9$ не имеет решений.

Если $c = 27$, то $b = 75$, $100 \leq A = 2^m \cdot b = 2^m \cdot 75 < 1000$, то есть $1 \leq m \leq 3$. Тогда $5^2 < 29 = 2 + 27 \leq 2^m + 27 \leq 8 + 27 = 35 < 5^3$, следовательно, уравнение $5^n = 2^m + 27$ не имеет решений.

Если $c = 81$, то $b = 25$, $100 \leq A = 2^m \cdot b = 2^m \cdot 25 < 1000$, то есть $2 \leq m \leq 5$. Тогда $5^2 < 85 = 4 + 81 \leq 2^m + 81 \leq 32 + 81 = 113 < 5^3$, следовательно, уравнение $5^n = 2^m + 81$ не имеет решений.

Случай 3. $3y + z - 2x > 0$ и $x - y - z > 0$. Положим $n = 3y + z - 2x$, $m = x - y - z$ ($n, m \geq 1$).

Тогда имеем равенство $2^n 5^m A = A + 2025$. Отсюда следует, что $2025 : A$, то есть $2025 = Ac$, следовательно, $2^n 5^m = 1 + c$. Так как A – трёхзначное, то $1 < c < 21$, следовательно, $c \in \{3, 5, 9, 15\}$.

Если $c = 3$, то $2^n 5^m = 1 + 3 = 4$, нет решений.

Если $c = 5$, то $2^n 5^m = 1 + 5 = 6$, нет решений.

Если $c = 9$, то $A = 225$, тогда $2^n 5^m = 1 + 9 = 10$, следовательно, $n = 1$, $m = 1$, $3y + z - 2x = 1$, $x - y - z = 1$, $x = y + z + 1$, $3y + z - 2y - 2z - 2 = 1$, $y = z + 3$. Можно взять $z = 0$, тогда $y = 3$, $x = 4$.

Если $c = 15$, то $2^n 5^m = 1 + 15 = 16$, нет решений.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (все 4 варианта с упоминанием того, какие ходы приводят к нужному результату) – 7 баллов.

За каждый пропущенный вариант оценка снижается на 2 балла.

За отсутствие упоминания того, как может быть получен вариант, оценка снижается на 1 балл.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

5. Из точки M , лежащей на продолжении диаметра AB полуокружности ω за точку A , проведена прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D , и вторая прямая, пересекающая

полуокружность в точках E и F , причём C лежит между M и D , а E лежит между M и F . На диаметре AB выбрана точка N такая, что $\angle ANC = \angle BND$. Докажите, что $\angle CNE = \angle DNF$.

Решение. Достаточно доказать, что $\angle ANE = \angle BNF$. Назовём точку N из условия задачи *подходящей* для полуокружности ω , точки M и прямой MC , пересекающей эту полуокружность. Докажем, что положение подходящей точки на отрезке AB не зависит от расположения точки C на полуокружности. Построим полуокружность до окружности и проведём из точки D перпендикуляр к AB . Пусть G – вторая точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью, H – его точка пересечения с AB . Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, то треугольники NHG и NHD равны по двум катетам, следовательно, $\angle GNH = \angle DNH = \angle ANC$.

Из равенства углов $\angle GNH$ и $\angle ANC$ следует, что точки C , N и G лежат на одной прямой. Также заметим, что треугольники MHG и MHD также равны по двум катетам, следовательно, $\angle GMH = \angle DMH$, то есть MN – биссектриса треугольника MCG . Так как квадрат биссектрисы угла треугольника равен разности произведения сторон, заключающих этот угол, и произведения отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону, то для треугольника MCG имеем равенство

$$MN^2 = MC \cdot MG - NC \cdot NG.$$

Так как $MG = MD$, а по свойству пересекающихся хорд имеет место равенство $NC \cdot NG = AN \cdot NB$, то $MN^2 = MC \cdot MD - AN \cdot NB$. По свойству секущих имеем равенство $MC \cdot MD = MA \cdot MB$, следовательно, $MN^2 = MA \cdot MB - AN \cdot NB$. Заменив в этом равенстве MN суммой $MA + AN$, а NB разностью $MB - MA - AN$, получим равенство

$$(MA + AN)^2 = MA \cdot MB - AN(MB - MA - AN).$$

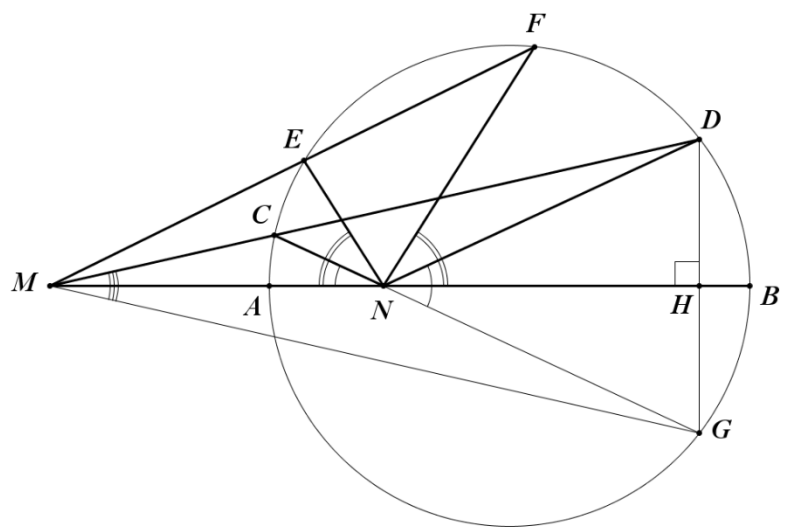
Пусть $AN = x$. Выполнив алгебраические преобразования, получим цепочку равносильных уравнений относительно x :

$$MA^2 + 2MA \cdot x + x^2 = MA \cdot MB - MB \cdot x + MA \cdot x + x^2,$$

$$(MA + MB)x = MA(MB - MA),$$

$$x = \frac{MA \cdot (MB - MA)}{MA + MB}.$$

Из последнего равенства видим, что длина отрезка AN зависит только от расположения точки M относительно A и B и не зависит от расположения прямой MC . Таким образом, подходящая точка для прямой ME будет такой же, как и для прямой MC , то есть совпадёт с точкой N и будет выполняться равенство $\angle ANE = \angle BNF$.



Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
11 класс

Замечание. Для точек A, B, M и N выполнено равенство $\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} : \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = -1$. В таком случае говорят, что пара точек M и N гармонически разделяет пару точек A и B .

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Доказано, что точка N лежит на прямой CG и что MN – биссектриса треугольника MCG , – 1 балл.

Если решение участника зависит от расположения хорды EF относительно хорд AB и CD и при этом рассмотрен только один случай такого расположения, то баллы не снижаются.

Формулу длины биссектрисы можно использовать без обоснования.
