

Условия и решения задач

11.1 Пусть $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$, где a — положительное действительное число, не равное единице. Для каждого такого a найдите значение выражения

$$f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{2}{101}\right) + f\left(\frac{3}{101}\right) + \dots + f\left(\frac{100}{101}\right).$$

Ответ: 50.

Решение. Заметим, что при любых значениях a и x

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{a^{1-x}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{a}{a + \sqrt{a} \cdot a^x} = \\ &= \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + a^x} = 1. \end{aligned}$$

Тогда, обозначив искомую сумму за S , получим

$$S = \left[f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{100}{101}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{101}\right) + f\left(\frac{99}{101}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{50}{101}\right) + f\left(\frac{51}{101}\right) \right] = 50.$$

□

11.2 Про некоторую компанию людей известно, что любые два человека, у которых одинаковое количество друзей в этой компании, не имеют общих друзей. Докажите, что в этой компании найдётся человек, у которого ровно один друг. (Предполагается, что по крайней мере одна пара друзей в этой компании имеется).

Решение. Рассмотрим человека M с наибольшим числом друзей, пусть их у него n . Каждый из них имеет не более n друзей. С другой стороны все они имеют общего друга M , поэтому число друзей у всех них различно. Таким образом, среди них будет по одному человеку с 1, 2, ..., n друзьями. □

11.3 В квадрате 100×100 расставлены ненулевые числа так, что в каждой строке числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце — геометрическую прогрессию. Докажите, что знаменатели всех геометрических прогрессий совпадают.

Решение. Выделим в большом квадрате любой квадратик, образованный тремя соседними строками и столбцами. По условию задачи в его клетках стоят следующие числа:

$$\begin{array}{ccc} a & (a+b)/2 & b \\ c & (c+d)/2 & d \\ x & (x+y)/2 & y \end{array}$$

При этом выполнены условия

$$c^2 = ax, \quad d^2 = by, \quad (c+d)^2 = (a+b)(x+y).$$

Из первых двух уравнений имеем $x = \frac{c^2}{a}$, $y = \frac{d^2}{b}$. Подставляя в третье равенство получим

$$(c+d)^2 = (a+b) \left(\frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} \right).$$

После упрощений получим $(ad - bc)^2 = 0$, откуда $ad - bc = 0$ и $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{c+d}{a+b}$.

Это означает, что в любых трёх соседних столбцах стоят геометрические прогрессии с одинаковым знаменателем, следовательно, и во всех столбцах стоят прогрессии с одинаковым знаменателем. $\square$

11.4 Один ряд стадиона рассчитан на 200 зрителей. На футбольный матч пришло 2000 учащихся из разных школ города, при этом от каждой школы пришло не более 40 человек. Все учащиеся одной школы должны сидеть в одном ряду. Какое наименьшее количество рядов при этом потребуется?

Ответ: 12.

Решение. Сначала докажем, что двенадцати рядов достаточно. Расположим всех учащихся в одну линию так, чтобы ученики каждой школы шли подряд. Удалим из линии учеников с номерами 200, 400, 600, ..., 1800, а также всех остальных учеников из их школ. Оставшиеся участники оказались разбиты на 10 групп, причём в каждой группе не более 200 человек. Поэтому их можно рассадить в десять рядов. Удалённые из линии ученики учатся в девяти школах, причём в каждой не более 40 человек, значит, их можно разместить на двух рядах. Итак, двенадцати рядов достаточно.

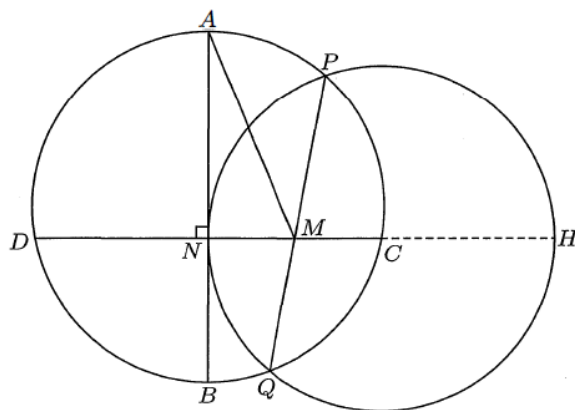
Теперь покажем, что одиннадцати рядов не хватит. Рассмотрим пример: пусть всего $n = 59$ школ, причём в каждой из первых 58 по 34 ученика, а в последней — 28 учеников. Так как $34 \cdot 6 > 200$, то, кроме, возможно, одного ряда (в котором можно разместить шесть школ), в каждом другом ряду поместятся не более пяти школ. Если рядов всего одиннадцать, то можно рассадить максимум $5 \cdot 10 + 6 = 56$ школ, а это меньше 59. Следовательно, одиннадцати рядов недостаточно. $\square$

Комментарий. Доказательство, что 12 рядов хватит — 4 балла. Доказательство недостаточности 11 рядов — 3 балла. Только ответ — 0 баллов.

11.5 В окружности ω_1 проведён диаметр $AB = 20$. Хорда $CD = 16$ перпендикулярна диаметру AB и пересекает его в точке N , причём $AN > NB$. Окружность ω_2 с центром в C и радиусом CN пересекает ω_1 в точках P и Q . Отрезки PQ и CD пересекаются в точке M . Найдите длину AM .

Ответ: $4\sqrt{17}$.

Решение.



Продолжим DC до пересечения с ω_2 в точке H . Заметим, что $DN = NC = CH = 8$. По свойству пересекающихся хорд имеем $MP \cdot MQ = MN \cdot MH = MC \cdot MD$, то есть $MN(MC + 8) = MC(MN + 8)$, откуда $MN = MC$. Следовательно, $MN = 4$.

Из равенств $NA \cdot NB = NC \cdot ND$, $AN + NB = 20$, $DN = NC = 8$ получим

$$NA \cdot (20 - NA) = 8^2.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем $NA = 16$ или $NA = 4$. Так как $NA > NB$, то $NA = 16$. Следовательно, $AM = \sqrt{NA^2 + MN^2} = \sqrt{16^2 + 4^2} = 4\sqrt{17}$. $\square$

Комментарий. Найдено только AN — 2 балла. Найдено только NM — 4 балла.