

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

11 класс

1. Доказать, что на множестве действительных чисел уравнение $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$ не имеет корней. (Указание: выполнить подстановку $x = \frac{1}{z}$)

Решение:

1 СПОСОБ

Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$, определенную на множестве действительных чисел.

Исследуем функцию на экстремумы.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2.$$

Критические точки $x = 0$; $x = 3$.

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 3) \setminus \{0\}, f'(x) > 0 \text{ при } x \in (3; +\infty).$$

Поэтому $x = 3$ – точка минимума функции. Значение функции в данной точке

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 1 = -28 < 0.$$

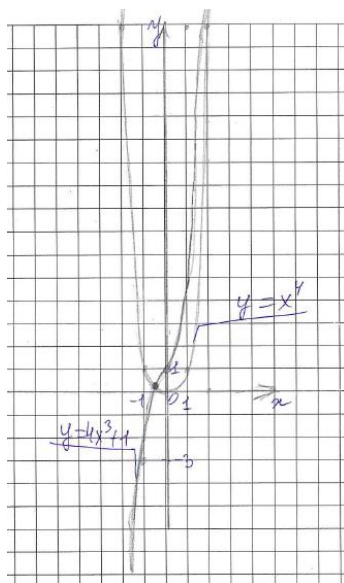
Значит, функция пересекает ось Ox в двух точках. Поэтому уравнение имеет 2 корня на множестве действительных чисел.

2 СПОСОБ

$$x^4 = 4x^3 + 1$$

Рассмотрим две функции $f(x) = x^4$ и $g(x) = 4x^3 + 1$.

Построим графики данных функций в одной системе координат.



По рисунку видно, что графики функций пересекаются хотя бы в одной точке. Значит, данное уравнение имеет минимум 1 корень на множестве действительных чисел.

3 СПОСОБ

Подстановка $x = \frac{1}{z}$.

$$z^{-4} - 4z^{-3} - 1 = 0$$

Рассмотрим функцию $f(z) = z^{-4} - 4z^{-3} - 1$, определенную на множестве действительных чисел, кроме 0.

Исследуем функцию на экстремумы.

$$f'(z) = -4z^{-5} + 12z^{-4}.$$

Критические точки $z = 0$; $z = \frac{1}{3}$.

$f'(z) < 0$ при $z \in (-\infty; \frac{1}{3}) \setminus \{0\}$, $f'(z) > 0$ при $z \in (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Поэтому $z = \frac{1}{3}$ – точка минимума функции. Значение функции в данной точке

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - 1 = -28 < 0.$$

Значит, функция пересекает ось Ox в двух точках. Поэтому уравнение имеет 2 корня на множестве действительных чисел.

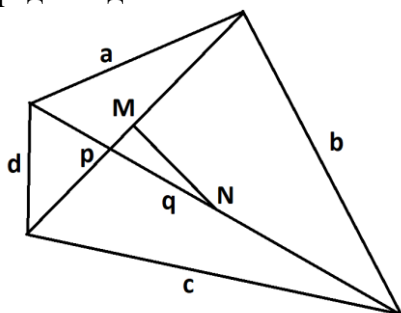
Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности (имеются погрешности в применении символики и терминологии).
5	Ход решения верный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна не принципиальная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно.
4	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3	Приведено доказательство, обоснованное некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательство не содержит.
2	Приведены идеи для доказательства или не доведены до конца.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при ошибочном решении.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

2. В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов сторон и диагоналей равна m . Доказать, что его площадь не превосходит $\frac{m}{8}$.

Решение:

Для любого выпуклого четырехугольника справедлива теорема Эйлера (которая является обобщением тождества параллелограмма). Она гласит, что сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей плюс учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.



Пусть M и N — середины диагоналей p и q соответственно. Тогда:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4(MN)^2$, где MN — длина отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Выражение m через диагонали. Подставим это тождество в данное нам условие

$$\begin{aligned} m &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + p^2 + q^2 \\ m &= (p^2 + q^2 + 4(MN)^2) + p^2 + q^2 \\ m &= 2p^2 + 2q^2 + 4(MN)^2 \\ m &= 2(p^2 + q^2) + 4(MN)^2 \end{aligned}$$

Площадь выпуклого четырехугольника S можно выразить через длины его диагоналей p и q и синус угла φ между ними:

$$S = \frac{1}{2} pq \cdot \sin \varphi$$

Теперь построим цепочку неравенств, чтобы связать S и m .

Начнем с выражения для m :

$$m = 2(p^2 + q^2) + 4(MN)^2$$

Квадрат любого действительного числа неотрицателен, поэтому $(MN)^2 \geq 0$.

Следовательно: $m \geq 2(p^2 + q^2)$

Применим неравенство о средних арифметическом и геометрическом (неравенство Коши) для неотрицательных чисел p^2 и q^2 :

$$(p^2 + q^2) / 2 \geq \sqrt{p^2 q^2} = pq$$

Отсюда $p^2 + q^2 \geq 2pq$.

Объединим неравенства из пунктов 2 и 3:

$$m \geq 2(p^2 + q^2) \geq 2(2pq) = 4pq$$

Итак, мы получили важное соотношение: $m \geq 4pq$

Теперь вернемся к формуле площади. Поскольку $0 < \varphi < 180^\circ$, то $0 < \sin \varphi \leq 1$. Значит:

$$S = \frac{1}{2} pq \cdot \sin \varphi \leq \frac{1}{2} pq$$

Из неравенства $m \geq 4pq$ выразим $pq \leq \frac{m}{4}$

Подставим это в неравенство для площади:

$$S \leq \frac{1}{2} pq \leq \frac{1}{2} \left(\frac{m}{4} \right)$$

$$S \leq \frac{m}{8}$$

Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное, строго обоснованное решение. Все шаги логичны, доказаны, не пропущены ключевые моменты. Все неравенства строго обоснованы (ссылка на известное неравенство или его краткий вывод). Допускаются альтернативные полные решения (например, с использованием векторного или координатного метода), если они корректны.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности, не влияющие на общую логику и итог (описка, некоторые шаги недостаточно подробно объяснены).
5	Ход решения верный, с одной существенной ошибкой или пробелом. Получена основная цепочка неравенств, но допущена ошибка, не разрушающая общую логику.
4	Приведены идеи для решения, но не хватает ключевых связей. Задача сведена к важному промежуточному результату, но дальнейшего продвижения нет. Доказана половина утверждения. Рассмотрен частный случай и проверено неравенство для него с попыткой обобщения.
3	Верно записаны необходимые соотношения, но решение не продвинуто дальше. Доказано несколько ключевых промежуточных фактов, но они не сведены воедино.
2	Приведены идеи для частного случая, записаны стандартные формулы, нет системного подхода
1	Представлены начальные размышления, рисунок, но нет значительного

	продвижения в решении. Верно записана хотя бы одна из формул, связанных с задачей, но они не связаны в логическую цепочку.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

3. Приведите пример числа x , для которого выполняется равенство
 $\sin 2026x - \operatorname{ctg} 2025x = \cos 2024x - 2\operatorname{tg} 2025x$.

Ответ обоснуйте.

В условии задачи разработчиками была допущена ошибка: перепутана тригонометрическая функция, равенство должно иметь вид:

$$\cos 2026x - \operatorname{ctg} 2025x = \cos 2024x - 2\operatorname{tg} 2025x.$$

Поэтому критерии оценивания изменились.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Проведены верные преобразования выражений с использованием тригонометрических формул;
2	В преобразованиях выражений допущены незначительные ошибки.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований.
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.

Согласно предложенному условию задачи один из вариантов преобразований тригонометрических выражений.

$$\text{Заметим, что } 2026x = 2025x + x \\ 2024x = 2025x - x$$

$$\text{Пусть } 2025x = a, \text{ тогда}$$

$$\sin 2026x = \sin(2025x + x) = \sin(a + x) \\ \cos 2024x = \cos(2025x - x) = \cos(a - x)$$

$$\sin(a + x) - \operatorname{ctg} a = \cos(a - x) - 2\operatorname{tg} a$$

$$\sin a \cos x + \sin x \cos a + 2 \frac{\sin a}{\cos a} = \cos a \cos x + \sin a \sin x +$$

$$\sin a (\cos x - \sin x) + \cos a (\sin x - \cos x) = \frac{\cos a}{\sin a} - 2 \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$(\sin a - \cos a)(\cos x - \sin x) = \frac{\cos^2 a - 2\sin^2 a}{\sin a \cos a}$$

Так как достаточно привести пример числа x , предположим

$$\sin a - \cos a = 0 \text{ и } \cos^2 a - 2\sin^2 a = 0 \\ \text{противоречие}$$

4. За круглым столом сидят 22 толстяка. Суммарный вес любых семи подряд сидящих отличается от семи центнеров не более чем на 13 грамм, а любых трех подряд сидящих превосходит три центнера не менее чем на 4 грамма. Найдите максимально возможную разницу в весе двух рядом сидящих толстяков.

Решение.

Сначала докажем, что вес любых двух толстяков отличается не более, чем на 11 грамм. Зафиксируем некоторого толстяка с весом 1 центнер + a_1 грамм. Тогда оставшиеся 21 толстяк разбиваются на 7 подряд сидящих групп по 3 человека в каждой, поэтому для суммарного веса S всех толстяков получаем неравенство $S \geq 22$ центнера + a_1 гр + $4 \cdot 7$ гр. Аналогично, зафиксируем некоторого толстяка с весом 1 центнер + a_2 грамма, тогда оставшиеся разбиваются на 3 подряд сидящие группы по 7 человек в каждой, поэтому $S \leq 22$ центнера + a_2 гр + $13 \cdot 3$ гр. Вычитая два неравенства, получаем: $a_1 - a_2 \leq 11$ грамм. Итак, разница весов двух любых толстяков (не обязательно сидящих подряд!) не превосходит 11 грамм.

Осталось построить пример, когда вес некоторых двух подряд сидящих толстяков отличается ровно на 11 грамм. Один из таких примеров может быть следующим: 5, -6, 5, 5, -6, 5, 5, -6, 5, 5, -6, 5, 5, -6, 5, 5, -4, 3, 5, (Указано отличие веса от одного центнера.)

Комментарий. Построению примера может помочь такое соображение. Возьмем 7 толстяков, и выделим среди них две подряд сидящие группы по 3 человека. Тогда вес оставшегося не превосходит одного центнера + 5 грамм (иначе вес всех семи толстяков отличался от семи центнеров более чем на 13 грамм). Итак, в любом примере веса всех толстяков не превосходят 1 центнер 5 грамм.

Ответ: 11 грамм

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение. Полностью и корректно доказано, что разница весов любых двух толстяков не превосходит 11 грамм. Приведён корректный пример рассадки, где разница весов двух соседей равна 11 грамм, и этот пример удовлетворяет всем условиям задачи.
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности. Есть и доказательство оценки, и пример, но в одном из них содержится мелкий, легко исправимый недочет.
5	Ход решения верный, но доведено до конца. Полностью доказано, что разница не может превышать 11 грамм, но пример не построен или построен неверный пример.
4	Ход решения в целом верный, но доведено до конца. Построен только пример. Доказательство того, что 11 является максимально возможным значением, отсутствует или содержит грубые ошибки.
3	Верно определена ключевая идея, но алгоритм не доведен до конца. Сформулирована ключевая идея решения: рассмотреть суммарный вес S всех толстяков и оценить его двумя разными способами, исключая по одному толстяку. Однако при составлении или решении системы неравенств допущена существенная ошибка, которая привела к неверному результату.
2	Доказано важное вспомогательное утверждение. Нет ключевой идеи с оценкой суммарного веса, но доказана нетривиальная лемма, следующая из условий. Отсутствует пример.
1	Записаны верные исходные данные в математической форме. Дальнейших существенных продвижений нет.
0	К заданию не приступали или решение показывает незнание соответствующего материала

5. Вася решил раскрасить таблицу размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) в цвета светофора. В результате его трудов получилось, что в каждом столбце и количество желтых и количество зеленых клеток не превышает количество красных. А в каждой строке и число красных и число зеленых клеток не превышает количество желтых клеток. Сколько клеток Вася закрасил в зеленый цвет?

Решение:

1) В каждой строке таблицы красных клеток не меньше, чем желтых, следовательно, и во всей таблице красных клеток не меньше, чем желтых.

В каждом столбце таблицы желтых клеток не меньше, чем красных, следовательно, и во всей таблице желтых клеток не меньше, чем красных.

Таким образом, в таблице одинаковое количество красных и желтых клеток.

2) Предположим, что в каком-нибудь столбце желтых клеток больше, чем красных. Так как в каждом из остальных столбцов желтых клеток не меньше, чем красных, то тогда во всей таблице желтых клеток будет больше, чем красных, но это не так (см. 1). Значит, в каждом из восьми столбцов красных и желтых клеток поровну.

З	З	Ж	К	Ж	К	Ж	К
К	Ж	З	З	К	Ж	К	Ж
Ж	К	К	Ж	З	З	Ж	К
К	Ж	Ж	К	Ж	К	З	З
Ж	К	К	Ж	К	Ж	К	Ж
К	Ж	К	Ж	К	Ж	К	Ж
Ж	К	Ж	К	Ж	К	Ж	К

3) Так как в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем зеленых, то исключаются случаи, когда в каждом столбце: а) 1 желтая, 1 красная, 5 зеленых клеток и б) 2 желтые, 2 красные, 3 зеленых клетки.

Остается только случай, когда в каждом столбце 3 красных, 3 желтых и 1 зеленая клетка. Тогда всего в таблице — 8 зеленых клеток.

Этот случай возможен. Например, см. таблицу.

Ответ: 8

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное верное решение
6	Ход решения верный, ответ правильный, но в рассуждениях есть незначительные пробелы или неточности.
5	Ход решения верный, умозаключения сделаны правильные, но не пояснены исключительные случаи когда в каждом столбце: а) 1 желтая, 1 красная, 5 зеленых клеток и б) 2 желтые, 2 красные, 3 зеленых клетки
4	Верный ответ с указанием, что в таблице одинаковое количество красных и желтых клеток, но без обоснований.
3	Приведены рассуждения только для частного случая без рассмотрения остальных частных случаев и без указания на их невозможность
2	Приведены идеи для решения, но не доведены до конца.
1	Приведен только ответ, без пояснений и обоснований ИЛИ в самом начале рассуждений допущена ошибка, но дальнейшие рассуждения имеют место быть
0	Решение отсутствует или решение показывает незнание соответствующего материала.