

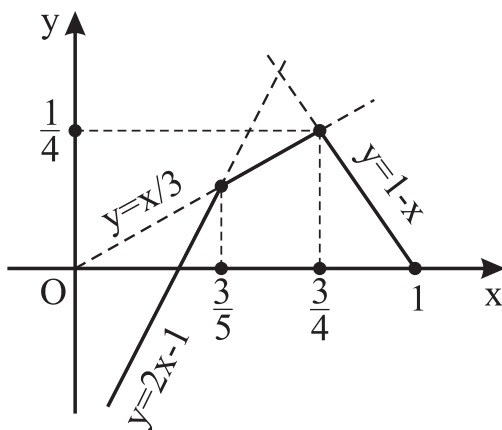
Решения задач, 11 класс

11.1. Найдите максимальное значение на отрезке $[0; 1]$ функции

$$y = \min \left(1 - x, 2x - 1, \frac{x}{3} \right).$$

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Решение. Решим эту задачу графически.



Построим в одной системе координат графики функций $y = 1 - x$, $y = 2x - 1$ и $y = \frac{x}{3}$. Вычислим точки их попарного пересечения, попадающие в отрезок $[0, 1]$, это $x = \frac{3}{5}$ и $\frac{3}{4}$. Эти точки разбивают отрезок на три части. На каждой из них выбираем график, лежащий не выше других. Запишем аналитическое представление

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & 0 \leq x < \frac{3}{5}, \\ \frac{x}{3}, & \frac{3}{5} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 1 - x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Из графика видно, что

$$\max_{x \in [0, 1]} y(x) = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

□

11.2. Можно ли найти два таких последовательных натуральных числа, больших 1 000 000, что суммы их цифр являются точными квадратами?

Ответ. Существуют.

Решение. Рассмотрим, например, числа

$$n = 999\,999\,999 \quad \text{и} \quad n + 1 = 1\,000\,000\,000,$$

у которых сумма цифр $S(n) = 81$ и $S(n + 1) = 1$.

□

11.3. Докажите неравенство

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x^{100}) \geq 200x^{100}, \quad x \geq 0.$$

Решение. Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} & 1 + x + x^2 + \dots + x^{100} + x^{101} + \dots + x^{200} - 200x^{100} = \\ &= (1 + x^{200}) + (x + x^{199}) + (x^2 + x^{198}) + \dots + (x^{100} + x^{100}) - 200x^{100} \geq \\ &\geq 2x^{100} + 2x^{100} + \dots + 2x^{100} - 200x^{100} \geq 0, \end{aligned}$$

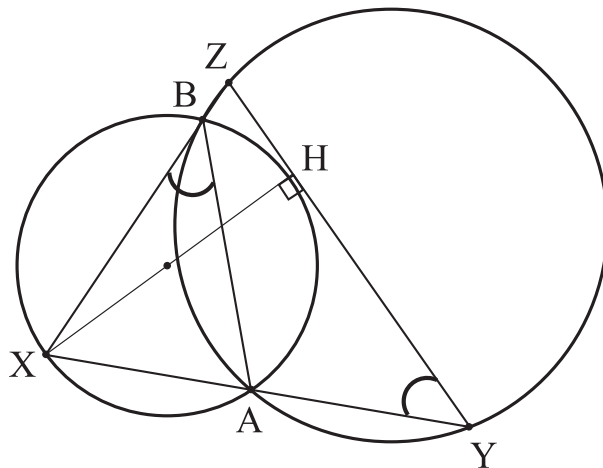
где воспользовались неравенством

$$x^{100} = \sqrt{x^k \cdot x^{200-k}} \leq \frac{x^k + x^{200-k}}{2}.$$

□

11.4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA , которая пересекает вторую окружность в точке Y . Прямая XB пересекает вторую окружность в точке Z . Докажите, что прямые, содержащие высоты всех таких треугольников XYZ , проведённые из точки X , проходят через фиксированную точку.

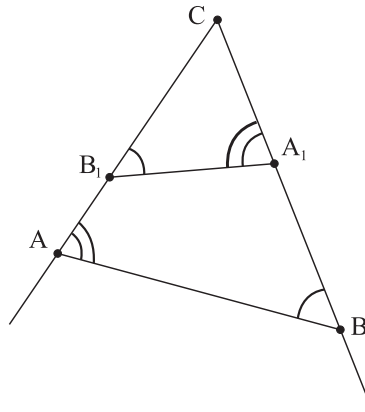
Решение.



Заметим, что точки Z, Y, A и B лежат на одной окружности. Отсюда следует равенство углов $\angle XBA = \angle XYZ$ или антипараллельность отрезков AB и YZ относительно прямых XU и XZ .

Высота XH треугольника XYZ проходит через центр описанной окружности треугольника XAB , то есть через центр первой окружности.

Определение. Пусть точки B_1 и A_1 лежат на прямых CA и CB , то отрезки A_1B_1 и AB антипараллельны (относительно прямых CA и CB или относительно угла ACB), если $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$.



□

11.5. Справедливо ли утверждение, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить как $n^2 + p$, где n – натуральное, а p – простое число?

Ответ. Справедливо.

Решение. Покажем, что бесконечно много квадратов не представимо в виде $n^2 + p$.

Действительно, пусть $m^2 = n^2 + p$, тогда $m^2 - n^2 = p$, то есть $(m - n)(m + n) = p$. Последнее в силу того, что число p простое возможно только в случае $m - n = 1$, $m + n = p$. Откуда получаем $m = \frac{p+1}{2}$. Мы получили, что равенство $m^2 = n^2 + p$ возможно только для чисел m вида $\frac{p+1}{2}$, где p – простое. С другой стороны, существует бесконечно много нечётных чисел, не являющихся простыми, например числа 3^r , $r \geq 2$.

□