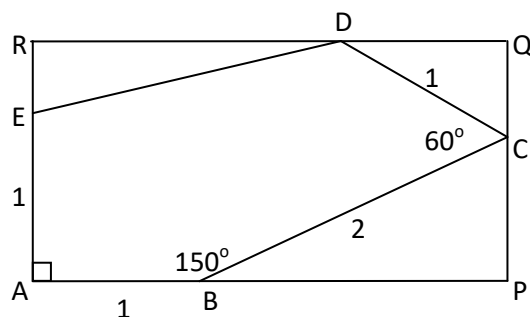


1. **Ответ:** за 3 дня. **Решение.** Всего пар школьников 15. В самом деле, каждый из 6 школьников составляет пару с каждым из 5 остальных, но все такие пары мы подсчитали дважды - с одним и с другим школьником. Если школьники распределились в две команды по 3 человека (например, {1, 2, 3} и {4, 5, 6}; в скобках перечислены номера школьников), то 6 пар школьников успели побывать в одной команде друг с другом (в данном случае пары 1-2, 1-3, 2-3, 4-5, 4-6, 5-6). Если в одной команде было 4 школьника, а в другой 2 (например, {1, 2, 3, 4} и {5, 6}), то 7 пар школьников успели побывать в одной команде друг с другом (в данном случае пары 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4, 5-6). В любом случае за один день тренировок поучаствует друг с другом в одной команде не более 7 пар школьников. Так как всего пар школьников $15 > 2 \cdot 7$, двух дней не достаточно.

Примеры распределения на команды такие, что школьники могут поучаствовать в команде каждый с каждым за 3 дня. Первый пример: 1-й день {1, 2} и {3, 4, 5, 6}, 2-й день {3, 4} и {1, 2, 5, 6}, 3-й день {5, 6} и {1, 2, 3, 4}. Легко проверить, что каждый школьник поучаствовал и с представителем своей пары (пары 1-2, 3-4, 5-6), и с представителями двух других пар (в тот день, когда его пара соревновалась с объединением двух других пар). Второй пример: 1-й день {1, 2, 3} и {4, 5, 6}, 2-й день {1, 2, 4} и {3, 5, 6}, 3-й день {1, 2} и {3, 4, 5, 6}; проверьте этот пример самостоятельно. Есть и другие примеры.

2. **Комментарий.** К сожалению, в условии задачи имеется опечатка: на рисунке не было указано, чему равна верхняя правая сторона. Без этой информации площадь вычислить невозможно. Рассуждать можно, например, так.

Первое решение. Впишем пятиугольник ABCDE в прямоугольник APQR (см. рисунок). Для нахождения площади пятиугольника ABCDE нужно из площади прямоугольника APQR вычесть сумму площадей прямоугольных треугольников BCP, CDQ и DER.



Заметим, что $\angle CBP = 30^\circ$ (как смежный с $\angle ABC$), $\angle BCP = 60^\circ$ (по сумме углов в треугольнике BCP), $CP = 1$ и $BP = \sqrt{3}$. Поэтому $AP = 1 + \sqrt{3}$. $\angle DCQ = 60^\circ$ (так как $\angle PCQ$ развёрнутый, а два из трёх составляющих его частей известны).

Пусть $CD = a$, тогда $CQ = a/2$, $PQ = a/2 + 1$, $DQ = a\sqrt{3}/2$.

Тогда $DR = AP - DQ = 1 + \sqrt{3} - a\sqrt{3}/2 = 1 + \sqrt{3}(1 - a/2)$, $ER = PQ - AE = (a/2 + 1) - 1 = a/2$. Зная стороны прямоугольника APQR и катеты прямоугольных треугольников BCP, CDQ и DER, найдём искомую площадь:
 $S_{ABCDE} = AP \cdot PQ - \frac{1}{2} (BP \cdot PC + CQ \cdot QD + DR \cdot RE) = (1 + \sqrt{3}) \cdot (a/2 + 1) - \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cdot 1 + a^2 \cdot \sqrt{3}/4 + (1 + \sqrt{3}(1 - a/2)) \cdot a/2) = 1 + \sqrt{3}/2 + a/4 + a\sqrt{3}/2$. Нетрудно видеть, что при разных значениях a площадь четырёхугольника различается.

Второе решение. Как и в первом решении, впишем пятиугольник ABCDE в прямоугольник APQR. Заметим, что $AE = PC = 1$ (см. первое решение), а площадь четырёхугольника ABCE найти можно (для этого из площади прямоугольника APQR надо вычесть площадь прямоугольного треугольника BCP). $S_{ABCE} = 1 \cdot (1 + \sqrt{3}) - 1 \cdot \sqrt{3} / 2 = \sqrt{3} / 2 + 1$. Осталось заметить, что у треугольника CDE основание CE постоянно (и равно $1 + \sqrt{3}$), а высота (она равна CQ на рисунке) тем больше, чем больше CD.

3. **Решение.** Рассмотрим 20 пар противоположных вершин правильного 40-угольника. Пусть в a парах обе вершины красные, в b парах обе вершины синие, в c парах одна вершина красная, другая синяя. Так как красных и синих вершин по 20, то $2a + c = 20 = 2b + c$, откуда $a = b$ и $c = 20 - 2a = 10(2 - a)$.

Любая пара вершин является концами диаметра окружности, описанной около правильного 40-угольника; поэтому любые две пары вершин составляют четвёрку вершин некоторого прямоугольника. Объединив пару синих вершин с парой красных, мы получим четвёрку вершин прямоугольника, в которой поровну красных и синих вершин; образуем a таких четвёрок. Осталось с пар, в которых по одной красной и одной синей вершине; так как c чётно, то объединив такие пары по две произвольным образом, мы составим оставшиеся $c/2$ четвёрок вершин прямоугольников.

4. **Ответ:** 1024. **Решение.** Заметим, что $\text{НОД}(n, k)$ – это один из делителей числа n ; обозначим его d . Тогда $k = n + \text{НОД}(n, k) = n + d$. Подставим $n + d$ вместо k в условие задачи: $n + \text{НОД}(n, n + d) = n + d$.

Выясним, при каких d это равенство возможно; докажем, что $\text{НОД}(n, n + d) = \text{НОД}(n, d) = d$. Второе равенство в этой цепочке верно, так как n делится на d . Докажем первое равенство. У пары чисел $n, n + d$ такое же множество общих делителей, как и у пары чисел n, d (если некоторое t является делителем n и $n + d$, то оно является делителем d ; если t является делителем n и d , то оно является делителем $n + d$), поэтому наибольшие числа в этих множествах совпадают. Итак, всегда $\text{НОД}(n, n + d) = d$, а значит, всегда верно равенство $n + \text{НОД}(n, n + d) = n + d$. Поэтому в качестве d можно взять любой из делителей числа n .

У числа $n = p_1 p_2 \dots p_{10}$ имеется $2^{10} = 1024$ натуральных делителя (каждое из простых $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ может войти как множитель в разложение делителя на простые, а может нет, т.е. для каждого простого из списка имеется две возможности, а общее количество возможностей составить делитель d числа n равно $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$). Заметим, что как только мы выбрали число d , число k стало определено однозначно, поэтому разных k столько же, сколько разных d , т.е. их также 1024.

5. **Ответ:** не существует. **Решение.** Предположим противное – искомое подмножество M существует. Пусть $a > b$ – какие-то два числа из M . Для любого натурального n и любых чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ из M , не равных a и b , средние арифметические $(a + c_1 + c_2 + \dots + c_n)/(n + 1)$ и $(b + c_1 + c_2 + \dots + c_n)/(n + 1)$ целые. Но тогда их разность $(a - b)/(n + 1)$ целая при любом натуральном n , что невозможно при $n > a - b$.