

Критерии и методика оценивания выполненных олимпиадных заданий

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ**

**КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ
ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО
ТУРА**

**возрастной группы (11 класс) муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
2025/2026 учебный год**

Максимальная оценка результатов участника возрастной группы (11 класс) определяется арифметической суммой всех баллов, полученных за выполнение заданий и не должна превышать 35 баллов.

Задание 1.

Правильный ответ.

Событие A .

Решение.

Событие A включает в себя событие B , а событие B включает в себя событие C , то есть событие A наиболее обширное: $C \subset B \subset A$. Следовательно, $P(C) \leq P(B) \leq P(A)$.

Оценка задания.

Верное обоснованное решение – 7 баллов, решение неверно или только ответ – 0 баллов.

Задание 2.

Правильный ответ.

Для $n=4$.

Решение.

Пример пирога представлен в виде таблицы, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток:

	2		3	4	5	
0.7	1.4 $\approx$ 1	2.1 $\approx$ 2	2.8 $\approx$ 3	3.5 $\approx$ 4		
2.7	5.4 $\approx$ 5	8.1 $\approx$ 8	10.8 $\approx$ 11	13.5 $\approx$ 14		
3	6	9	12	15		
3.25	6.5 $\approx$ 7	9.75 $\approx$ 10	13	16.25 $\approx$ 16		

Докажем, что $n \leq 4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов – слева направо. Пусть числа в угловых клетках

равны $a < b < c < d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причём $ad=bc$. Пусть b – правое верхнее. Округлённые числа будем обозначать штрихами. Тогда $a'=1$, $d'=n^2$, $b' \geq n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c' \geq 2n-1$ (оно не меньше всех чисел первого столбца и верхней строки). Значит, $a < 1,5$, $d < n^2 + 0,5$, $b \geq n - 0,5$, $c \geq 2n - 1,5$. Поэтому

$$1,5(n^2 + 0,5) > ad = bc > (n - 0,5)(2n - 1,5),$$

откуда $1,5n^2 + 0,75 > 2n^2 - 2,5n + 0,75$, то есть $2,5n > 0,5n^2$, откуда $n < 5$.

Оценка задания.

Любое верное обоснованное решение – **7 баллов**, верный ответ, но в обосновании есть неточности – **3 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

Задание 3.

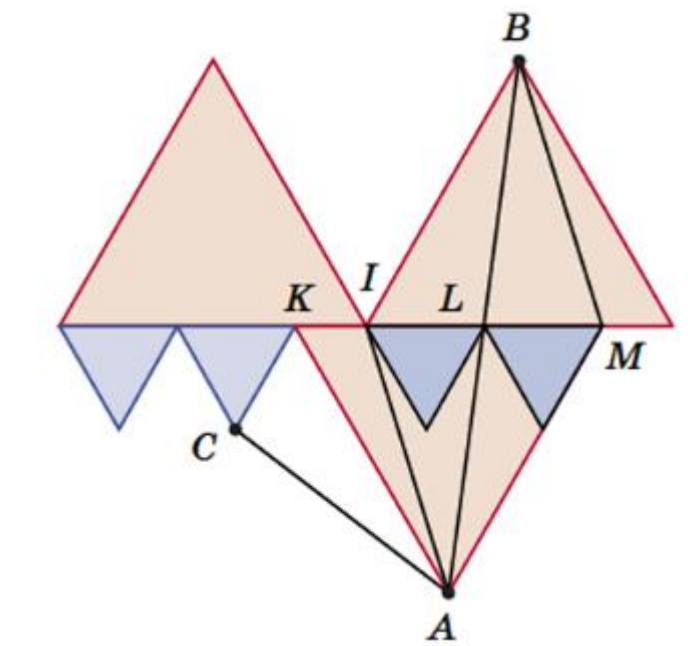
Правильный ответ.

$$\angle A = 60^\circ, \angle B = 30^\circ, \angle C = 90^\circ.$$

Решение.

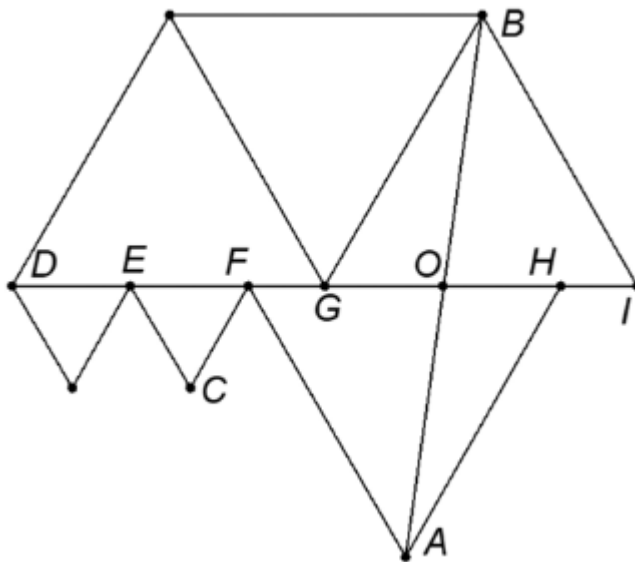
Решение 1.

Добавим на рисунок ещё два маленьких треугольника, как показано на рисунке. Заметим, что $AIBM$ – параллелограмм, а L – его центр. При повороте на 60° против часовой стрелки вокруг точки A треугольник AML , очевидно, переходит в треугольник AKC . Таким образом, в треугольнике ABC имеем: $AB = 2AL = 2AC$, $\angle A = 60^\circ$. Следовательно, он прямоугольный.



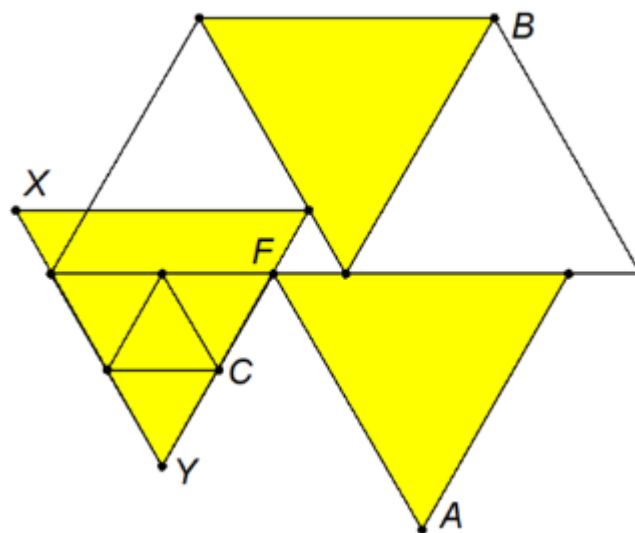
Решение 2.

Обозначим точки как показано на рисунке. Пусть m – длина стороны малого треугольника, b – большого. Равносторонние треугольники с вершинами A и B центрально симметричны. Значит, O – центр их симметрии. Поэтому $AO=OB$, $GO=OH=m$ и $EO=b$. Треугольники CEO , CFA и OHA равны, так как у них есть стороны m и b с углом 60° между ними. Следовательно, $CO=CA=OA$ и треугольник ABC прямоугольный с углом $A=60^\circ$.



Решение 3.

Пристроим к малым треугольникам ещё два, построим их до жёлтого равностороннего треугольника, как на рисунке. Видно, что жёлтые треугольники равны, значит, они переходят друг в друга при повороте на 120° вокруг центра треугольника между ними. Поэтому треугольник ABX равносторонний. Симметрия относительно точки C переводит отрезок FA в YX . Следовательно, ABC – половина треугольника ABX , отсюда получаем ответ.



Оценка задания.

Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

Задание 4.

Решение.

$\overline{XAXAXA} = \overline{XA} \cdot 10000 + \overline{XA} \cdot 100 + \overline{XA} = \overline{XA} \cdot 10101$. Так как $10101 = 7 \cdot 1443$, то $\overline{XAXAXA}$ делится на 7 без остатка.

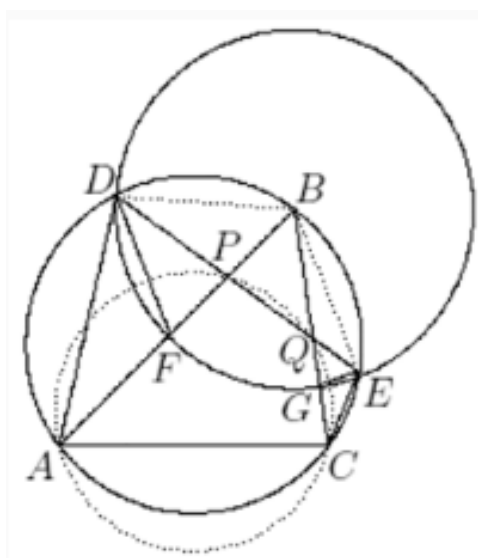
Оценка задания.

Любое полное верное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

Задание 5.

Решение.

Решение 1



Пусть α – окружность, описанная около треугольника ABC, β – окружность, на которой лежат точки D, F, G, E. Заметим, что эти точки лежат на β именно в таком порядке.

Пусть B' – центр окружности β . Докажем, что точки B и B' совпадают.

Углы ADE и ABE равны, так как опираются на дугу ACE,

откуда $2\angle FDE = \angle FBE$ (поскольку DF – биссектриса угла ADE). С другой

стороны, $\angle FB'E = 2\angle FDE$ (как центральный и вписанный углы), поэтому $\angle FBE = \angle FB'E$. Тогда точка B' лежит на дуге FBE описанной окружности треугольника FBE. Аналогично, точка B' лежит на дуге DBG описанной окружности треугольника DBG.

Но дуга DFGE лежит внутри окружности α , откуда дуга DBE лежит внутри окружности β .

Тогда дуги FBE и DBG также лежат внутри β и пересекаются в единственной точке, поскольку дуга FBE делит окружность β на две части, причём точки D и G попадают в разные части (D лежит на дуге FDE, а G – на дуге FGE). Значит, точки B и B' совпадают, поэтому B – середина дуги DBE (поскольку $BD = BE$).

Но тогда равны углы $\angle EAB$ и $\angle DAB$, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами DE и AB , мы получаем равенство:

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180^\circ - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырёхугольник $APQC$ вписанный.

Замечание. Обосновать тот факт, что дуги FBE и DBG пересекаются в единственной точке, можно по-разному. Например, рассмотрим радикальные оси трёх окружностей: $DFGE$, DBG и FBE . Они пересекаются в радикальном центре – точке пересечения отрезков DG и FE , исходя из последовательности точек на окружности. Пусть это точка S , а вторая точка пересечения окружностей DBG и FBE – это точка Z . Поскольку S лежит внутри хорды, то её степень относительно всех трех окружностей отрицательна, то есть S лежит между точками B и Z , откуда точка Z и точка B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой DG . Следовательно, Z не лежит на дуге DBG , то есть B – единственная точка пересечения указанных дуг.

Решение 2

Заметим сначала, что точки G и E лежат по другую сторону от прямой AB , нежели точка D , поэтому отрезки DF и GE не пересекаются. Отрезки же DE и FG не пересекаются по построению. Тогда D, E, G, F – последовательные точки на окружности, откуда четырёхугольник $DFGE$ выпуклый.

Далее мы докажем **лемму**: B – середина дуги DE , не содержащей точек A и C . Этого достаточно для решения задачи, поскольку тогда равны углы $\angle EAB$ и $\angle DAB$, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами DE и AB , мы получаем равенство:

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180^\circ - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырёхугольник $APQC$ вписанный.

Доказать лемму можно по-разному.

1-й способ. Предположим противное: серединой дуги DBE является точка B' , отличная от B . Не умаляя общности, B' лежит на дуге BE , не содержащей точки D . Тогда хорда AB' пересекает хорду DE в точке P' , такой что P лежит между D и P' . Далее DF – биссектриса угла $P'DA$, пусть F' – точка её пересечения с $P'A$, тогда F лежит между D и F' . Аналогично, если Q' – точка пересечения $B'C$ с DE , а G' – точка пересечения EG с $B'C$, получаем, что G' лежит между G и E . Имеем тогда:

$$\begin{aligned}\angle F'DB' &= \angle F'DE + \angle EDB' = \frac{1}{2}\angle ADE + \angle EDB' = \frac{1}{2}\angle ADE + \angle DEB', \\ \angle DF'B' &= 180^\circ - \angle F'DB' - \angle DB'F' = (\angle DB'A + \angle ADE + \angle DEB' + \angle EDB') - \left(\frac{1}{2}\angle ADE + \angle EDB'\right) - \angle DB'F' = \\ &= \frac{1}{2}\angle ADE + \angle DEB' = \angle F'DB',\end{aligned}$$

то есть треугольник $F'DB'$ равнобедренный и $DB' = F'B'$. Аналогично получаем $EB' = G'B'$, и из определения B' выполнено $DB' = B'E$, то есть, D, F', G', E лежат на окружности с центром B' . Так как четырёхугольники $DFGE$ и $DF'G'E'$ оба вписанные, то $F'G'$ и FG параллельны (так как они обе антипараллельны DE относительно DF и EG). Однако, раз $DFGE$ выпуклый, то прямая, параллельная FG и проходящая через точку G' , лежащую на стороне GE , пересечёт луч FD , но она пересекает прямую FD в точке F' , лежащей на продолжении FD за F – противоречие.

2-й способ. Пусть B' – центр описанной окружности ω четырёхугольника $DFGE$. Так как $\angle FDE$ острый, то $12\angle FB'E = \angle FDE = 12\angle ADE = 12\angle ABE = 12\angle FBE$, то есть $\angle FB'E = \angle FBE$, при этом B и B' лежат одну сторону с D от прямой FE (B' по эту сторону, так как $\angle FDE$ острый). Тогда B' лежит на описанной окружности треугольника BFE , аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BGD . Заметим сразу, что раз $\angle FBE = 2\angle FDE > \angle FDE$, то B лежит внутри ω . Предположим, $B \neq B'$. Тогда при инверсии относительно ω точка B переходит в общую точку образов описанных окружностей треугольников BFE и BGD , то есть в точку пересечения FE и GD , то есть в точку пересечения диагоналей $DFGE$, то есть в некоторую точку внутри ω , но это невозможно, так как B сама внутри ω – противоречие. Значит, $B = B'$, откуда $BD = BE$, и значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C .

3-й способ. Пусть ω – описанная окружность четырёхугольника $DFGE$, Ω – описанная окружность треугольника ABC . Так как Q – точка внутри ω , то луч QB пересекает ω , пусть в точке Y ; $Y \neq B$ (иначе бы различные окружности ω и Ω имели три общие точки). Аналогично, пусть X – точка пересечения луча PB с ω . Тогда, пользуясь равенствами вписанных углов и тем, что EG – биссектриса угла DEC , имеем следующие равенства ориентированных углов:

$$\begin{aligned}\angle(BD, DY) &= \angle(BD, BC) + \angle(BC, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(YG, YD) = \\ &= \angle(DE, EC) + \angle(EG, ED) = -\angle(EG, ED) = -\angle(YG, YD) = -\angle(YB, YD),\end{aligned}$$

откуда треугольник YDB равнобедренный, то есть $BD = BY$, аналогично получаем $BE = BX$. Из равнобедренности YDB следует, что угол DYB острый, тогда Y лежит на продолжении QB за точку B (иначе бы YBD был смежным с вписанным углом DYQ , который острый, так как равен острому вписанному углу DEG). Тогда далее имеем

$$\begin{aligned}\angle YDE &= \angle YDB + \angle BDE = \angle DYB + \angle BDE = \\ &= \angle DEG + \angle BDE = \frac{1}{2}\angle DEC + \angle BDE < \frac{1}{2}\angle DBE + \angle BDE.\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $\angle XED < 2\angle DBE + \angle BED$. Складывая эти неравенства, имеем $\angle XED + \angle YDE < \angle DBE + \angle BED + \angle BDE = 180^\circ$. Значит, DY и EX не параллельны, поэтому серединные перпендикуляры к DY и EX имеют единственную общую точку, но и B, и центр ω являются таковыми, значит B – центр ω . Тогда BD=BE и, значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

Оценка задания.

Любое верное решение (дано полное доказательство) – **7 баллов**, в доказательстве есть неточности – **3 балла**, решение неверно – **0 баллов**.