

7 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Определите количество семизначных симметричных чисел, записанных только четными цифрами. (Симметричным считаем число, одинаково читаемое и слева направо, и справа налево.)

Ответ. 500.

Решение. У таких чисел совпадают 7-я и 1-я, 6-я и 2-я, 5-я и 3-я цифры. Поэтому выбрать нужно только цифры на позиции 1-4. Исходя из условия, 1-я выбирается из 4-х вариантов: 2, 4, 6, 8, так как 0 на первом месте быть не может, все дальнейшие из 5. Учитывая независимость выбора, число вариантов надо перемножать. Получим $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

Критерии. Записан ответ без обоснований – 0 баллов; в решении не учтено, что 0 не может быть первой цифрой, получен ответ 625 – 3 балла; логика решения верна, допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.

2. Брокер имеет некоторое количество акций и совершает одну биржевую операцию в секунду: либо продает, либо покупает количество акций, равное номеру секунды, начиная с первой. На какое минимальное число может отличаться от первоначального количество акций у этого брокера после 2025-й секунды торгов?

Ответ. На 1.

Решение. Количество акций у брокера после 2025 секунд торгов отличается от исходного на $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 2025$. В этом выражении нечетное число нечетных слагаемых, их 1013. Поэтому значение этого выражения в любом случае нечетно, и поэтому не равно 0. Тогда минимальная величина отклонения равна 1. Ее можно получить, например, так: $1 + 2 + 2025 - 3 - 2024 + 4 + 2023 - 5 - 2022 \dots$, то есть числа, кроме 1, разбиты на пары с равной суммой, этих пар 1012, и половина из них взята со знаком плюс, остальные – со знаком минус.

Критерии. Замечено, что величина нечетна – 2 балла. Дополнительно к вышесказанному сделан вывод, что минимальное значение отклонения равно 1 – 3 балла (с предыдущим не суммируется, а поглощает его). Приведен любой верный пример получения 1 без предыдущих обоснований – 2 балла. Приведены и рассуждения, приводящие к 1, и любой верный пример – 7 баллов.

Замечание. Пример не единственный, и может быть приведен в любой форме, в том числе описательной.

3. Имеется десять внешне не различимых гирь с массами 1,2,...,10 грамм, и надписи о массах гирь стерты. Также имеются чашечные весы, показывающие разность масс на двух чашах. Верно ли, что сделав всего одно взвешивание, можно однозначно установить массу хотя бы одной гири?

Ответ. Верно.

Решение. Положим на первую чашу любую одну гирю, пусть ее масса x г, а на вторую – остальные девять. Поскольку сумма масс всех гирь определена и равна 55 г, на второй чаше окажется $55-x$. Тогда при разных весах на первой чаше весы будут показывать разную разницу весов, она будет равна $55-2x$, и вес гири на первой чаше можно точно определить.

Критерии. Ответ «нет», обоснованный любым образом, или же любой алгоритм определения веса гири, позволяющий сделать это не во всех случаях либо при каких бы то ни было дополнительных условиях – 0 баллов; верный алгоритм при недостаточном его обосновании – 5 баллов.

4. Обозначим $[x]$ – *целой частью* числа - наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[1,5] = 1$, $[-1,5] = -2$. Обозначим $\{x\}$ – *дробной частью* числа – разность между числом и его целой частью, то есть $\{x\} = x - [x]$.

Решите уравнение $[x] + 5 \cdot \{x\} = 20,25$.

Ответ. 16,85; 17,65; 18,45; 19,25; 20,05.

Решение. Учитывая, что $[x]$ – наибольшее целое число, меньшее или равное x , получаем, что $0 \leq \{x\} < 1$. Тогда $0 \leq 5\{x\} < 5$, и при этом $[x]$ – число целое, поэтому дробная часть полностью входит во второе слагаемое. Получаем возможные варианты значений $5\{x\}$: это 0,25; 1,25; 2,25; 3,25; 4,25. Далее, $[x] = 20,25 - 5\{x\}$, и, наконец, $x = [x] + \{x\}$.

Удобно составить таблицу, приводящую к верным значениям x :

$5\{x\}$	$\{x\}$	$[x]$	x
0,25	0,05	20	20,05
1,25	0,25	19	19,25
2,25	0,45	18	18,45
3,25	0,65	17	17,65
4,25	0,85	16	16,85

Критерии. Подбором найдено одно значение $x=20.05$ – 1 балл. Найдено тоже подбором без обоснований более одного значения, но не все – 2 балла. Верно найдены все пять значений без обоснований – 3 балла. Обоснованно найдены все значения, но допущены арифметические одно-типные ошибки – 6 баллов. То же, но ошибки разных видов – 5 баллов.

5. Завхозу спортивного лагеря было нечего делать, и он решил провести учет банок с тушенкой. Завхоз стал раскладывать все имеющиеся банки в две коробки всеми возможными способами и установил, что число банок, лежащих в первой коробке, ровно в восьми случаях составило целое число процентов от общего числа банок. Сколько банок всего могло быть?

Ответ. Такое невозможно.

Решение. Пусть всего банок n , в т.ч. в первой коробке m . Число банок в первой коробке от общего числа банок составляет $\frac{m}{n} \cdot 100\%$, то есть по условию задачи число $\frac{100m}{n}$ должно быть целым для ровно восьми значений m , причем $0 \leq m \leq n$. В двух случаях $m=0$ и $m=n$ это число – целое, независимо от выбора числа n , в остальных ситуациях требуется, чтобы $100m$ делилось на n , при том, что $0 < m < n$. Для этого в числе n должны присутствовать делители числа 100, а в числе m – другие делители числа n . Пусть p – один из общих делителей n и 100, тогда получим, что $100 = pq$, $n = pk$. Нужная делимость будет для значений m из множества $k, 2k, 3k, \dots, (p-1)k$ и только для них, то есть количество этих значений составляет $p-1$, а с учетом ранее упомянутых крайних 0 и n их становится $p+1$. То есть по условиям задачи, $p+1=8$, отсюда $p = 7$ – делитель 100, что неверно.

Критерии. Неверный ответ вне зависимости от объяснений – 0 баллов. Получен верный ответ, но не обоснован – 1 балл. Ответ обоснован недостаточно – от 2 до 5 баллов: если сведено к рассмотрению дроби без дальнейших продвижений – 2 балла; указано, какой вид должно иметь число в знаменателе – 3 балла; связано с делителями числа 100 – 4 балла; не произведено выписывание возможных значений, а сразу сделан вывод – 5 баллов.

6. В шахматном турнире участвовало 20 человек и каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Известно, что каждый участник хотя бы один раз сыграл вничью и что если какие-то два человека сыграли вничью, то каждый из остальных восемнадцати выиграл у кого-то из них. Докажите, что все участники выиграли одинаковое количество партий.

Решение. Предположим, что какой-то игрок А сыграл вничью более одного раза. Рассмотрим людей В и С, с которыми он сыграл вничью. Тогда с одной стороны В выиграл у С, а с другой - С выиграл у В – противоречие. Значит, каждый сыграл вничью ровно один раз. Теперь предположим, что какой-то игрок А выиграл более 9 игр, т.е. хотя бы 10. Тогда среди людей, у которых он выиграл, обязательно найдутся двое В и С, сыгравшие вничью. Пусть А сыграл вничью с D. Тогда В и С выиграли у D (т.к. А они проиграли), с другой стороны D должен выиграть у кого-то из В и С – противоречие. Значит, каждый игрок выиграл не более 9 игр. Всего игр $20 \cdot 19/2 = 190$ и из них 10 сыграно вничью, т.е. игр не вничью сыграно 180 и если какой-то из игроков выиграл не более 8 игр, то какой-то выиграл более 9 игр, потому что в противном случае общее число игр окажется меньше требуемого. Значит, каждый выиграл хотя бы 9 раз. Это возможно только тогда, когда каждый выиграл ровно 9 игр – что и требовалось.

Такой турнир возможен. Разобьем участников на 5 групп по четыре человека. В каждой группе играют вничью игроки 1-2 и 3-4, 1-й выигрывает у 3-го и проигрывает 4-му, 2-й выигрывает у 4-го и проигрывает 3-му. Далее, каждый участник этой группы выигрывает у всех участников двух следующих групп и проигрывает всем участникам двух оставшихся групп (считаем группы расположенными по кругу, то есть за 5-й следующей будет 1-я).

Замечание. Поскольку турнир объявлен в условии задачи как состоявшийся, приведение примера от участников олимпиады не требуется, и решение может не содержать последнего абзаца.

Критерии. Показано, что ничьих у каждого игрока ровно по одной – 2 балла; далее показано, что игрок не мог выиграть более 9 игр – 4 балла; произведен подсчет числа игр – +1 балл к любому ранее описанному случаю; сделан верный вывод на основе подсчета и двух предыдущих соображений, недостаточно обоснованный – 6 баллов.