

7 класс

7.1. Найдите четыре целых числа таких, что их сумма равна нулю, а произведение равно 2025.

Ответ. Например, -1 , -45 , 45 и 1 .

Решение. Заметим, что $2025 = 45^2$. Тогда, например, подойдут числа -1 , -45 , 45 и 1 .

Замечание. Существуют и другие примеры. Любая четвёрка чисел вида a ; $-a$; $\frac{45}{a}$; $-\frac{45}{a}$, где a – делитель числа 45, подходит.

Комментарий. Любой правильный пример – 7 баллов.

7.2. В кошельке лежали 10 монет достоинством 5 и 10 рублей. Семь ребят разобрали все монеты, причём каждый взял либо одну монету, либо две. Если кто-то брал две монеты, то это были монеты разного достоинства. Известно, что у Пети в итоге оказалось меньше денег, чем у любого другого ребёнка. Какая сумма могла лежать в кошельке?

Ответ. 80 рублей.

Решение. Так как ребят 7, а монет 10, и каждый брал либо одну, либо две монеты, то трое ребят взяли по две монеты, а четверо по одной. Заметим, что любой взявший две монеты получил 15 рублей, что больше, чем у любого, взявшего одну монету. Значит, у Пети монета достоинством в 5 рублей, у остальных троих, взявших по одной монете – по 10 рублей. Значит, в кошельке было $5 + 10 \cdot 3 + 15 \cdot 3 = 80$ рублей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 2 балла.

7.3. Среди 11 человек есть лжецы (они всегда лгут) и рыцари (они всегда говорят правду). Каждому из них дали несколько конфет, после чего каждый сказал: «У меня чётное число конфет». После этого некоторые люди дали часть своих конфет кому-то другому. Может ли оказаться, что теперь каждый может сказать: «У меня нечётное число конфет»?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть такое возможно. Так как каждый изменил свой ответ, то количество конфет у него изменило чётность. Посчитаем общее количество конфет после передачи конфет. Оно изменилось на величину, равную сумме 11 нечётных слагаемых (слагаемое будет со знаком «плюс», если у человека увеличилось количество конфет, и со знаком «минус» – если уменьшилось). Эта величина – нечётное число. Но общее количество конфет не могло измениться. То есть оно изменилось на 0, а 0 – чётное число. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. Прямоугольник разрезан на равные квадраты. Для каждого из квадратов посчитали количество квадратов разрезания, имеющих с данным квадратом общую сторону. Все посчитанные числа сложили и получили сумму, равную 220. Найдите количество квадратов разрезания, если известно, что по крайней мере один из них не имеет общих точек с границами прямоугольника.

Ответ. 63.

Решение. Пусть прямоугольник имеет размеры $m \times n$ ($m \geq n$, длину стороны квадрата разрезания считаем равной 1). Так как хотя бы один из квадратов разрезания не имеет общих точек с границами прямоугольника, то каждое из чисел m и n хотя бы 3. У прямоугольника есть 4 угловые клетки, каждая из которых имеет две соседние клетки; кроме того есть $2(n - 2) + 2(m - 2)$ неугловых клеток, расположенных на сторонах прямоугольника, у каждой из которых по 3 соседние клетки; а также $(n - 2)(m - 2)$ внутренние клетки, у каждой из которых по 4 соседние клетки. Общее количество соседних клеток равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot (2n + 2m - 8) + 4 \cdot (mn - 2m - 2n + 4) = 4mn - 2m - 2n$. По условию это количество равно 220. Значит, $4mn - 2m - 2n = (2m - 1)(2n - 1) - 1 = 220$, то есть $(2m - 1)(2n - 1) = 221$. Но $221 = 17 \cdot 13$ – произведение двух простых чисел. Значит, $2m - 1 = 17$, $2n - 1 = 13$, откуда $m = 9$, $n = 7$. Отсюда количество квадратов разрезания равно 63.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.5. Олег утверждает, что какие бы 50 попарно различных натуральных чисел ему не дали, он может выложить их в ряд так, что среди сумм соседних чисел встретится не менее N составных. Какое наибольшее значение может принимать N ?

Ответ. 48.

Решение. Если все числа одной четности, то все суммы будут чётными числами (большими 2), а, значит, составными. Иначе, расставив сначала все чётные, а затем все нечётные числа, Олег гарантирует, что 48 из 49 сумм точно будут чётными числами. Покажем, что 49 составных чисел можно получить не всегда. Пусть Олегу дали набор чисел $1, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_{49} - 1$, где $p_1, p_2, \dots, p_{49}$ – различные нечётные простые числа. Тогда как бы ни выкладывал числа Олег, число 1 вместе со своим соседом в сумме будет давать простое число.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что можно сделать 48 составных сумм – 4 балла.

Доказано, что 49 составных сумм можно сделать не всегда – 3 балла.