

Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2025 г.)

7 класс

1. Имеется две кучки одинаковых монет: в одной 2025 монет, в другой – 2024 монеты. Играют двое. Ходы делают по очереди. За один ход игрок может взять любое количество монет из любой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Как играть, чтобы выиграть?

Решение. Выигрывает первый игрок. Выигрышная стратегия состоит в уравнивании монет в кучках. Первый игрок первым своим ходом забирает 1 монету из кучки, в которой 2025 монет. Второй игрок каждым своим ходом вынужден нарушать равенство числа монет в кучках. Первый игрок следующим своим ходом это равенство восстанавливает.

2. Докажите, что n^2+n+1 не делится на 2026 ни при каком целом n .

Доказательство. Заметим, что $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$. Значит, $n^2 + n + 1$ является нечетным числом при любом n , и поэтому не делится на 2026. Что и требовалось доказать.

3. Сравните числа:

$$A = 2024 \cdot 20252025 \cdot 202620262026 \text{ и } B = 2026 \cdot 20242024 \times 202520252025.$$

Решение. Заметим, что $A = 2024 \cdot 20252025 \cdot 202620262026 = 2024 \cdot 2025 \cdot 10001 \cdot 2026 \cdot 100010001 = 2024 \cdot 2025 \cdot 2026 \cdot 10001 \cdot 100010001$; $B = 2026 \cdot 20242024 \times 202520252025 = 2026 \cdot 2024 \cdot 10001 \cdot 2025 \cdot 100010001 = 2024 \cdot 2025 \cdot 2026 \cdot 10001 \cdot 100010001$.

Ответ: $A = B$.

4. Даны несколько одинаковых фигур, составленных из одинаковых квадратных клеточек (см. рисунок). Можно ли из них сложить квадрат?

Примечание. Использовать можно любое количество таких фигур.



Решение. Из двух таких фигур можно сложить прямоугольник 2×3 (см. рисунок 1а), а из таких прямоугольников уже легко сложить квадраты со стороной, кратной шести.

Ответ: да, можно. Например, такой, как на рисунке 1б.



Рис. 1а

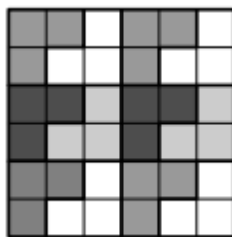


Рис. 1б

5. Четыре мальчика Алексей, Борис, Иван и Павел стоят в одном ряду. На них надеты разные головные уборы: берет, кепка, панама и шляпа. Известно, что: мальчик в берете стоит между мальчиком в кепке и мальчиком в шляпе; справа от мальчика в панаме стоит Павел; Борис стоит правее и Андрея, и Павла; Андрей стоит не с краю; мальчик в кепке и мальчик в панаме стоят не рядом. В каком порядке стоят мальчики, и какой головной убор надет на каждом из них?

Решение. Для удобства изложения повторим все условия задачи:

- 1) мальчик в берете – между мальчиком в кепке и мальчиком в шляпе;
- 2) справа от мальчика в панаме – Павел;
- 3) Борис – правее и Андрея, и Павла;
- 4) Андрей – не с краю;
- 5) мальчик в кепке и мальчик в панаме – не рядом.

Поскольку мальчик в берете стоит между мальчиком в кепке и мальчиком в шляпе (условие 1), а мальчик в панаме – не рядом с мальчиком в кепке (условие 5), то возможны только два варианта расположения мальчиков по головным уборам: «кепка, берет, шляпа, панама» или «панама, шляпа, берет, кепка». Первый из приведённых вариантов неверен, поскольку по условию 2 мальчик в панаме не может стоять на правом крае. Остаётся только одна возможность расположения мальчиков по головным уборам: «панама, шляпа, берет, кепка». Из условия 2 сразу же определяется, что Павел в шляпе. Отсюда и из условия 4 следует, что Андрей в берете. В свою очередь отсюда и из условия 3 следует, что Борис в кепке. Значит, Иван может быть только в панаме. Окончательный ответ: Иван в панаме, Павел в шляпе, Андрей в берете, Борис в кепке.

Ответ: Иван в панаме, Павел в шляпе, Андрей в берете, Борис в кепке.